BIBLIOTECA NAZ.
XXXIII
B
57
NAPOLI
XXIII
b
57
BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXIII
B
57
NAPOLI

XXVI. F. 1[illegible]

Digitized by Google

Digitized by Google

ELEMENTA
GEOMETRIÆ
PLANÆ ac SOLIDÆ,

Quibus accedunt ſelecta

EX ARCHIMEDE
THEOREMATA.

AUCTORE

ANDREA TACQUET

SOCIETATIS JESU,

Sacerdote, & Matheſeos Profeſſore.

In hac nova Editione inſerta eſt

TRIGONOMETRIA PLANA

ejuſdem Auctoris, & Sphærica aliunde deſumpta.

BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III" NAPOLI

PATAVII, MDCCXXIX.

Ex Typographia Seminarii.

Apud Jo: Manfrè. *Superiorum Permiſſu.*



Digitized by Google

AMICE LECTOR.

Cum multis jam annis Elementorum Geometricorum, minoris formæ, in hiſce locis penuria laboratum eſſet, viſum denique eſt ad uſum ſtudioſæ juventutis, cujus gratia hunc laborem qualemcumque ſuſcepi, novam editionem adornare, in qua quid præſtitum ſit, paucis accipe.

1. *In primis Geometriæ planæ ac ſolidæ Elementa conjunxi, ne (ut fit plerumque) ſemper in planis tyrones hæreant; ſed ab his tranſeant ad ſolida, quorum ſumme neceſſaria cognitio eſt.*

2. *Propoſitionum hypotheſibus, & aſſertionibus litteras, parentheſi incluſas, quibus ad figuram referri poſſint, appoſui; quod eo conſilio feci, ne ante demonſtrationem, iterum explicanda aſſertio, adeoque idem bis repe-*

Digitized by Google

tendum eſſet, & tamen litteris a reliquo ſenſu parentheſi ſeparatis, ſua aſſertioni univerſalitas conſtaret. Aſſertionem igitur conveniet legere primum litteris prætermiſſis; tum, ſi non intelliges, te litteræ ad figuram ducent.

3. Propoſitiones aliquas prætermiſi, quarum fere vel nullus uſus eſt, aut certe non alius, quam ut per eas demonſtrentur aliæ, quas ſine illis faciliori via poteram demonſtrare. Eoſdem tamen propoſitionum retineo numeros, quos Euclides, ordinemque ſervo, quem bis mille annorum uſus probavit.

4. Demonſtrationes vel novas affero, vel antiquas breviores plerumque, ac faciliores conor efficere. Et prolixitas quidem raro prodeſt. Ea ſiquidem tardiores, & hebetiores non juvat, ſubtilibus autem, & ingenioſis moleſta eſt.

5. Quamvis autem brevis eſſe ſtuduero, exiſtimavi tamen, me a propoſito non recedere, ſi ea adderem, quæ Geometriam diſcere volentibus futura uſui videbantur. Itaque Corollaria, & Scholia adjunxi non pauca, quæ uſu longo didici in elementis deſiderari. Geometriæ practicæ fontes indico ſuis locis. Tum ſi quid illuſtre ad rem occurreret, non omiſi. Varia deinde, in quibus laboratum hucuſque fuit, vel explicare, vel

demon-

demonſtrare conatus ſum.

6. *In Libro Primo Parallelarum theoria demonſtratur independenter ab undecimo axiomate, quod non axioma, ſed theorema eſt, & quidem non niſi difficulter, ac longo circuitu demonſtrabile.*

7. *Secundum Librum, in quo laborare multum tyrones ſolent, diſpoſui ad eum fere modum, quo jam Analyſtæ ſcribunt æquationes ſuas. Quem ſi exacte tenere voluiſſem, fuiſſet quidem res brevior, ſed minus, ut arbitror, tyronibus accommodata.*

8. *In Libro Tertio ad Propoſit.* 16. *paradoxa anguli contactus, quæ hactenus torſere omnes, ſolvuntur.*

9. *In Quinto Libro Proportionum doctrinam, ut quidem ab Euclide traditur, ſatis ſpinoſam, efficere planiorem conatus ſum. Itaque primum Proportionum elementa, faciliori quadam methodo, multiplicibus ablegatis, traduntur. Deinde hujus Libri ſextam definitionem, qua proportionum æqualitas per multiplices explicatur, oſtendi non definitionem eſſe, ſed theorema, & quidem difficile, & perobſcurum; cujus etiam demonſtrationem exhibemus hactenus a nullo datam. Atque ita demonſtrationes Euclidæas, quæ hinc ducuntur omnes, ſi quis forte illas præ noſtris probationibus deſideret, ſtabilivimus. Tum a-*

 liud

liud quoddam æqualium proportionum aſſigno, ac demonſtro indicium univerſale primum facillimum, ex quo omnes Quinti Libri Propoſitiones demonſtrare potuiſſem, ſi hoc conducere diſcentibus judicaſſem. Poſtremo de Proportionibus non pauca ſcitu neceſſaria ſubjungo, ac in primis demonſtro axioma illud percelebre, ſeu potius theorema: Proportionem extremorum ex quotlibet intermediorum proportionibus componi, id, quod hactenus in Geometria fuit deſideratum.

10. *Librum duodecimum, cujus difficiles, ac prolixæ demonſtrationes diſcentibus terrori eſſe ſolent, alia via plus quam decies breviori demonſtravi. Quod ita ſe habere, qui hæc noſtra cum Euclide, ejuſque commentatoribus contulerit, deprehendet.*

11. *In Libris Quarto, Sexto, Undecimo præſtantur ea, quæ univerſim ſupra indicavimus.*

12. *Denique ſelecta ex Archimede theoremata, alia ſimiliter, ac breviori via demonſtrata adjunxi; eximiamque illius de cylindro, ac ſphæra doctrinam poſtremis tredecim Propoſitionibus adjectis ampliavi, quibus inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem ab eo in cylindro, ſphæraque repertam, ab æquilatero cono eidem ſphæræ circumſcripto, tam in ſoliditate, quam in ſuperficie*

con-

continuari. Euclidi porro Archimedæa illa ſubnexui, non quaſi adhuc elementa, ſed quia ſubtilitate pariter, atque uſu eximia ſunt: tum deinde ut Geometriæ candidatus intelligat, cum maximi Geometræ inventa admiranda aſſequi ſe ſe viderit, nihil in Matheſi futurum tam ſubtile, vel arduum, quod his inſtructus elementis percipere non poſſit.

Tu hæc habe; &, ſi placuerit, lege, ac diſce: inventurus in his principia nobiliſſimæ, & forte omnium antiquiſſimæ ſcientiæ; quod oſtendet tibi, quam ſubnecto

Digitized by Google

HISTORICA
NARRATIO
De ortu, & progreſſu Matheſeos.

MAthematum Elementa tradituro viſum eſt de illorum origine, ac præſtantia præfari quædam, ut intelligant Matheſeos Candidati, cujuſmodi ea ſcientia ſit, cui ſe conſecraturi ſunt, & planum fiat adverſus eos, qui, quæ ignorant, contemnunt, quantæ dignitatis ſint hæ diſciplinæ, quas omnium ætatum ſapientiſſimi viri incredibili ſtudio ſibi putaverint comparandas. Uſui porro mihi fuit, in hac relatione concinnanda Petri Rami diligentia, qui Scholarum toto primo libro bene magno Mathematicam Hiſtoriam ex Proclo, Laertio, Vitruvio, Gellio, Polybio, Tzetze, aliiſque accurate copioſeque conſcripſit.

Prima hominum ſcientia Matheſis fuit, ſi Joſepho credimus. Is lib. 1. cap. 3. ſcribit, Sethi nepotes Cœlorum ordinem, ac ſiderum curſus obſervaſſe. Ne autem hæc inventa ex hominum notitia dilaberentur, cum Adamus univerſalem mundi interitum fore prædixiſſet, unum diluvio, incendio alterum, excitarunt duas columnas, alteram lateritiam, alteram lapideam: & utrique

ſua

Digitized by Google

ſua inventa inſcripſerunt, ut ſi lateritiam diluvio deleri contingeret, lapidea ſuperſtes hominibus diſcendi copiam faceret, & quæ inſcripta continebat, ſpectanda exhiberet. Ajunt enim lapideam illam ab ipſis dedicatam, quæ & noſtris temporibus extat in Syria. Hæc ille, penes quem fides eſto.

Poſt diluvium primos mortalium Aſſyrios, & Chaldæos Mathemata coluiſſe tradunt idem Joſephus, Plinius, Diodorus, Cicero. Sed ortæ & florentes apud Chaldæos Mathematicæ artes, deinde ex Chaldæa & Aſſyria ad Ægyptios translatæ ſunt auctore Abrahamo. Is enim cum Deo jubente ex patrio ſolo in Palæſtinam, ac deinde in Ægyptum profectus eſſet, cerneretque Ægyptios artium bonarum capi ſtudio, atque indole ad diſcendum egregia eſſe, ut apud eumdem Joſephum eſt lib. 1. cap. 9. Arithmeticam illis Aſtronomiamque, quam præcedere Geometriam neceſſe fuit, communicavit. Quibus deinde ſtudiis adeo Ægyptii floruere, ut Ariſtoteles 1. Metaph. cap. 1. affirmet, Mathematicas artes primum in Ægypto a ſacerdotibus publica vacatione fretis inventas eſſe.

Exinde Matheſis ex Ægypto mare trajiciens ad Græciæ Philoſophos pervenit: Thales enim Mileſius, qui ante Chriſtum floruit annis 584. primus Græcorum cum in Ægyptum veniſſet, Geometriam inde in Græciam tranſtulit. Is ſane, præter alia, primi libri propoſitiones, 5, 15, 26 invenit. Eidem debentur 2, 3, 4, 5, l. 4. cujus inventi lætitia elatus bovem immolaſſe dicitur. Idem Æquinoctia & Solſtitia obſervare cæpit, Laertio teſte; & ſolis eclipſim, ut ſcribunt Hippias & Ariſtoteles, primus prædixit; & Tzetzes Auctor eſt

etiam

etiam eclipſim lunæ Regi Cyro prænunciaſſe. Quapropter hic primus in Græcia Mathematicæ ſcientiæ parens atque Auctor fuit.

Poſt hunc Pythagoras Samius ille Philoſophorum antiquiſſimus Mathematicas diſciplinas vehementer auxit ornavitque. Et Arithmeticam quidem ita coluit, ut omnis prope illi ratio philoſophandi ex numeris duceretur. Geometriam vero, ut refert Laertius, a materia abſtraxit primus; in qua mentis elatione invenit 32, 44, 47, 48, lib. 1. Sed in primis ob inventas 32 & 47 lib. 1, celebratur, & hujus quidem inventione lætitia tanta affectus eſt, ut teſte Apollodoro apud Laertium, hecatombem immolarit. Idem incommenſurabiles magnitudines, & regularia quinque corpora primus aperuit. Idem Aſtrologiam & Muſicam impenſe & docuit & exercuit. Neque ſolum acute & ſubtiliter multa invenit, ſed etiam ludum primus aperuit, in quo juventus tam honeſtas, tamque nobiles artes addiſceret.

Pythagoram Anaxagoras, Clazomenius, & Oenopides Chius ſecuti ſunt; quorum meminit Plato in Amatoribus, ubi adoleſcentes de Anaxagora, & Oenopide in circulorum deſcriptionibus concertantes inducit. Ab Anaxagora Geometriam quandam ſcriptam indicat Ariſtoteles: & ex Laertio accepimus oſtenſum ab eo ſolem Peloponneſo majorem (nota Aſtronomiæ incunabula) eundemque de habitatoribus in luna nonnulla diſputaſſe. Oenopidi adſcribit Proclus 12. & 23. lib. 1. Hos excepere Briſo, Antipho, & Chius Hippocrates, omnes, tentata circuli quadratura, ab Ariſtotele reprehenſi pariter, & celebrati. Sed hos inter longe clariſſimus Hippocrates fuit, ille e mercatore philoſophus, & Geometra, qui præter circuli

culi quadraturam, etiam cubi duplicationem primus tentavit per duas medias proportionales; quam viam ut ſingularem, & unicam omnis poſteritas amplexa eſt. Illius etiam illa propria & magna laus eſt, quod, Proclo teſte, elementa primus ſcripſerit, & ab aliis inventa ordinaverit.

Democritus non in Philoſophia ſolum, ſed etiam in Matheſi admirabilis fuit: ejus tum phyſica, tum forte etiam Mathematica monumenta perierunt invidia, (ut quidam ferunt) Ariſtotelis, ſua unius ſcripta cupientis legi. Democriti Philoſophiam Petrus Gaſſendus eruditiſſimo opere nuper edito inſtauravit. Theodorus Cyrenæus, licet ejus inventa Mathematica non extent, vel eo nomine magnus eſt, quod Platonis Magiſter fuiſſe memoretur.

Ad Platonem igitur aliquando pervenimus, quo nemo alius ſplendorem majorem attulit Mathematicis diſciplinis. Ille Geometriam maximis acceſſionibus amplificavit, ſtudio incredibili in ea collocato. Et in primis reperta eſt ab eo Analyſis, certiſſima inveniendi & ratiocinandi via. Philoſophiæ ſuæ libros Mathematicis rationibus diſtinxit, ac quidquid in Mathematicis admirabile conjunctum cum Philoſophia eſſet, excitavit. Academiæ foribus inſcriptum legebatur: οὐδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω; nullus Geometriæ expers accedito, illuſtri ſane argumento, quam non aliena ſed propria, quamque non inutilis, vel indecora, ſed honeſta & commoda Matheſis ſanæ certæque Philoſophiæ ſit. Quantus certe Plato Matheſeos fuerit & admirator & cultor, is demum intelliget, qui ejus monimenta perlegerit.

Ex Platonis Academia prope innumeri deinceps Mathematici prodierunt. Tredecim Platonis fa-

milia-

miliares a Proclo commemorantur, quorum ſtudiis Mathematica ſit abſoluta. Hinc Leodamas Thaſius, Archytas Tarentinus, Theætetus Athenienſis; a quibus Mathemata egregie ſunt amplificata. Leodamas Analyſim a Platone acceptam exercuit, ejuſque ope inveniſſe multa a Laertio dicitur. Theætetum tum inventa ſua, inter quæ Elementa ab eo ſcripta, & regularium corporum inſcriptio celebrantur, illuſtrem faciunt; tum Platonis encomia, qui etiam illius nomini dialogum inſcripſit. Archytas Elementa ſcripſit etiam ipſe, ejuſque duplicatio cubi apud Eutocium legitur, cujus etiam illa ſingularis fuit laus, quod Mathematicam ad humanos uſus traduxerit fere primus; unde & lignea columba ab eo facta volaſſe legitur apud Gellium. Quem ſecuti Dædalus, aliique artifices fabulis poetarum materiam præbuere. Archytas porro & Mathematicus fuit, & exercitus Imperator, qui nimirum in patriis bellis copiis civium ſuorum quinquies præfuit, & quinquies vicit. Neoclidis tantum nomen celebratur, Leonte fortaſſis diſcipulo illuſtrior, quam inventis ſuis. Leon ſane Mathematicæ univerſæ elementa conſcripſit, auxit, & ad uſum aptiora fecit. Quare inter præcipuos elementorum conditores ſuo merito cenſeri debet.

Audaxus Gnidius ſuperiorum æqualis in Arithmeticis magnus, & (ſi Scholiaſtæ Græco credimus) totum ei Quintum librum debemus; Elementa item conſcripſit, & generaliora effecit, & ſectiones a Platone inchoatas auxit; inſuper aſtronomicarum hypotheſeum primus fabricator extitit, & Geometriæ fontes, ut ſupra Archytas, ad organicam ac mechanicam derivavit. Amyclas Heracliotes, & Menechmus, ejuſque frater Dinoſtratus, Helicon,

con, Cyzicenus, Theudius, Hermotimus Colophonius, Philippus Mendeus, omnes Platonici, Geometriam multo perfectiorem reddiderunt. Et Menechmus quidem ſectiones conicas invenit, ac harum ope duas medias, cujus inventio ab Eutocio reliquis præfertur. Theudius, & Hermotimus elementa fecerunt univerſaliora, & auctiora. Atque hi omnes ex Platonis Academia, Mathematicam Philoſophiam ad perfectionem adduxerunt, ait Proclus. Sed & Xenocrates Platonis auditor, & Ariſtotelis magiſter, ipſeque Ariſtoteles cognitione Mathematum clari fuere. Illius cum auditor quidam eſſe vellet Geometriæ imperitus, abi, inquit, anſas enim Philoſophiæ non habes.

De *Ariſtotele* vero quid dicam? libri illius omnes locis Mathematicis ſunt referti, ex quibus in unum collectis librum confecit Blancanus. Ex Ariſtotelis ſchola duo præcipue celebrantur Eudemus, & Theophraſtus. Hic ſcripſit de numeris libros duos, de Geometria quatuor, de lineis individuis unum: ille hiſtoriam Mathematicam condidit, ex quo Proclus, aliique ſua mutuati ſunt. Ariſteo, Iſidoro, Hypſicli Geometris ſubtiliſſimis ſolidorum libros maxime debemus. Denique Euclides aliorum inventa collegit, ordinavit, auxit, demonſtravitque accuratius, eaque nobis reliquit elementa, quibus jam ubique terrarum ad Mathematicam juventus inſtituitur. Obiit anno ante Chriſtum 284. Euclidem ſecuti ſunt centum fere poſt annis Eratoſthenes, & Archimedes. Eratoſthenis clarum in primis nomen fuit, ſed ejus ſcripta periere. Archimedis habemus multa, multa amiſimus.

Sed Archimedem cum nomino, apicem quendam humanæ ſubtilitatis, totiuſque Mathematicæ diſciplinæ abſolutionem animo concipio. Ejus inven-

venta admiranda prodidere Polybius, Plutarchus, Tzetzes, aliique. Archimedi coævus fuit Conon Geometra & Aſtronomus, cujus mortem Archimedes deflet in lib. de quad. parab. Archimedem & Cononem intervallo non magno ſequitur Apollonius Pergeus, alter Geometriæ princeps, qui egregiæ laudis encomio magnus Geometra fuit appellatus. Illius extant quatuor Conicorum ſubtiliſſimi libri. Eidem adſcribuntur Euclidis libri 14. & 15. ab Hypſicle contracti. Hipparchus, & Menelaus, de ſubtenſis in circulo, hic 6, ille 12. libros primi conſcripſere, pro quo invento tam utili, & neceſſario non parva utrique laus & grata debetur. Extant etiam Menelai de triangulis ſphæricis libri tres. Theodoſii Tripolitæ viliſſimi ſphæricorum libri tres in omnium manibus verſantur. Atque hi quidem, ſi Menelaum excipias, ante Chriſtum vixere omnes.

Anno poſt Chriſtum 70. venit in lucem Claudius Ptolomæus, aſtronomorum princeps, vir plane mirabilis, ſupraque (inquit Plinius) naturam mortalium. Is vero non Aſtronomiæ tantum, ſed etiam Geometriæ peritiſſimus fuit; quod teſtantur tum alia multa ab eo ſcripta, tum in primis libri de ſubtenſis Menelai quidem 6, Hipparchi vero 12, ab illo ad 5. theoremata contracti. Plutarchi etiam nominatiſſimi Philoſophi extant Mathematica problemata. Jam Eutocii Aſcalonitæ erudita in Archimedem commentaria quis ignorat? Ab eo Philonis, Dioclis, Nicodemis, Spori, Heronis, tamquam excellentium in Mathematicis Magiſtrorum inventa de duplicando cubo recenſentur. Et Heronis quidem tam in mechanicis, quam in Geometricis excellens ingenium fuit. Cubi certe duplicatio ab eo tradita, a Pappo lib. 3. p. 7. laudatur

datur præ omnibus. Cteſibii Alexandrini, cui antlias debemus noſtras, admiranda opera a Vitruvio, Proclo, Plinio Athenæo celebrantur. Gemini quoque non minimum inter Mathematicos nomen eſt, quem Euclidi ipſi Proclus in quibuſdam præpoſuit.

Diophantus & ipſe Alexandrinus, in Arithmetica tantus fuit, quantus in Geometria Archimedes, Apollonius, Euclides, vere totius numericæ ſubtilitatis magiſter; a quo reperta ſit admirabilis illa ars, quam Algebram dicimus; quæ hiſce temporibus a Franciſco Vieta, & Renato Carteſio multo perfectior & univerſalior effecta eſt. Reliqui inter veteres celebrantur Nicomachus Arithmeticis, Geometricis, Muſicis clarus monimentis, Serenus binis de cylindri ſectione libris Geometris notiſſimus, Proclus, Pappus, Theon. Quantus Mathematicus fuerit Proclus, ex doctiſſimis ejus in Euclidem commentariis, aliiſque ſcriptis manifeſtum eſt. Atque hic opinor ille eſt, qui, ut refert Zonaras, & ex eo Ramus, ac Baronius, ſub annum Chriſti 514, Vitaliani claſſem Conſtantinopolim obſidentis optico ſpeculorum artificio combuſſit. Theonis laudes vere magnas mirabiliter exaggerat Petrus Ramus, ut etiam libros, quos Euclidi hactenus adſcripſere omnes, Theoni putet attribuendos. Sed iniquior ubique in Euclidem Ramus, neque ullo ſolido nixus fundamento, hic audiendus non erit. Ut finis aliquando ſit, agmen Pappus claudat tempore inter veteres poſtremus, ut qui vixerit ann. 400. ſed nominis claritudine, omnique laude Mathematum primis adnumerandus. Quæ ante Hypſiclem, Cteſibium, & Diophantum protulerat fœcunda ingeniorum parens Alexandria, hunc quoque ingenti bono Ma-

the-

theſeos dedit. Scripſit collectionum Mathematicarum libros ſeptem, e quibus duo primi perierunt. Reliqui quinque tam multis abundant, tamque variis ex omni prope genere Mathematum nobiliſſimis inventis, ut inter prima, quæ extant, veterum monimenta, ab omnibus cenſeantur.

Habetis originis ac progreſſionis Mathematicæ Hiſtoriam brevem, ex qua Matheſeos antiquitas, præſtantia, ac dignitas apparet. Sane Reipub. litterariæ principes iidem qui Philoſophiam, etiam Mathematicam genuere, gemellas ſorores partu velut uno, quas qui diſtrahere ab invicem violenter velit, næ ille in nativam illarum concordiam eum inſigni injuria crudelis ſit; quando, quod fieri in gemellis ſolet, uno vel loco vel morte ſublato, angi, quin & contabeſcere alterum neceſſe ſit.

ELE-

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER PRIMUS.

Scientiæ proprium munus eſt, ex notionibus quibuſdam ſimpliciſſimis rationali naturæ a conditore Deo impreſſis elicere aliquid, quod prius ignorabatur, atque inde rurſum aliud ex alio; ut prior cognitio ſemper ad ulteriorem ſit gradus. Quæ ratio ſi accurate teneatur, ex minimis, & per ſe notis ad rerum abditiſſimarum cognitionem pertingemus. Hanc methodum, rationemque ſcientiæ præ omnibus amplexæ ſunt eæ diſciplinæ, quæ in quantitatis contemplatione verſantur. Quo fructu id factum ſit, ſciunt omnes, qui hiſce ſtudiis imbuti ſunt. Et ſane Geometria (ut de aliis Matheſeos partibus jam nihil dicam) mirum eſt, quam brevi ex apertiſſimis ad obſcuriſſima trahat, & ex humillimis ad altiſſima ſtatim aſſurgat. Statuuntur primo ſimpliciſſima quædam, facillimaque principia, quibus nemo ratione præditus diſſentire poſſit. Deinde nihil aſſeritur, vel admittitur, quod ex ejus infallibili ratiocinio non ſit deductum. Atque ita demum admiranda theoremata, ab omni humano ſenſu, & cognitione remota, incredibili certitudine, ac evidentia innoteſcunt.

Principiorum genera, ex quibus Geometria omnis derivatur, ſunt tria; Definitiones, Poſtulata, Axiomata.

Digitized by Google

DEFINITIONES.

1 PUnctum eſt ſignum in magnitudine individuum.

Hoc eſt, quod dividi ne cogitatione quidem poſſit. Punctum omnis magnitudinis quaſi principium eſt, ſicut unitas numeri.

2 Linea eſt magnitudo tantum longa.

Nimirum carens omni latitudine. Intelligitur generari ex fluxu puncti.

3 Lineæ termini ſunt puncta.

Fig. 1. tab. 1. 4 Recta linea eſt, quæ ex æquo ſuis terminis interjicitur.

Vel ut Archimedes: Recta linea eſt minima linearum eoſdem terminos habētium; ſive eſt omnium breviſſima, quæ inter duo puncta duci poſſunt.

Vel ut Plato: Recta linea eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Unus omnium ſenſus eſt. Inſtrumentum, quo rectæ lineæ deſcribuntur, regula eſt, quæ utrum recta ſit, hoc examine licebit agnoſcere.

Juxta regulam deſcribatur linea; tum regulam inverſam ſic, ut extremitas prius dextera jam ſit ſiniſtra, rurſum applica lineæ prius deſcriptæ, ſi plane cum illa congruat, recta eſt regula, ſi non congruat, non erit recta. Ratio pendet ex axiomate 13.

5. Superficies eſt magnitudo tantum longa, & lata.

Duas ergo habet dimenſiones. Intelligitur generari ex fluxu lineæ.

6 Superficiei extrema ſunt lineæ.

7 Planum, ſive ſuperficies plana eſt, quæ ex æquo inter ſuas extremas lineas jacet.

Vel

Vel ut Hero: ſuperficies plana eſt, cujus omnibus partibus recta linea accommodari poteſt.

Generatur enim ſuperficies plana ex fluxu lineæ rectæ.

Vel: plana ſuperficies eſt, cujus extrema obumbrant omnia media.

Vel: plana ſuperficies eſt minima omnium eoſdem terminos habentium. *Idem ſenſus eſt omnium.*

Non definivit hic corpus, ſive ſolidum Euclides, quia nondum hic erat acturus de corpore. Ne quis tamen illius definitionem deſideret: corpus eſt magnitudo longa, lata, & profunda. Tres igitur dimenſiones habet corpus, ſuperficies duas, linea unam, punctum nullam.

8 Angulus planus eſt duarum linearum, in plano ſe mutuo tangentium, & non in directum jacentium, alterius ad alteram inclinatio.

Angulum igitur efficiunt duæ lineæ B A, C A ſe mutuo tangentes in A, ſic ut non exiſtant ſibi mutuo in directum; hoc eſt, non efficiant unam lineam. Fig. 2. 4.

9 Latera, ſeu crura anguli ſunt lineæ, quæ angulum efficiunt.

10 Vertex anguli eſt punctum (A) in quo crura ſibi mutuo occurrunt. Fig. 2. 4.

Cum angulus eſt unicus, una littera ad verticem poſita deſignatur. Cum plures ad unum punctum exiſtunt, deſignantur tribus litteris, quarum media denotat verticem anguli; vel etiam ſubinde unica lateribus prope verticem interpoſita. Sic in figura 5. angulus, qui fit a lineis B A, C A deſignatur vel litteris tribus B A C, vel unica O. Fig. 5.

11 Anguli æquales, vel potius ſimiles dicuntur, ſi, cum ſibi invicem vertices imponuntur, Fig. 2. 3.

latera unius congruant lateribus alterius : *Ad hoc non requiritur , ut latera ſint æque longa.*

Fig. 5. 12 Inæquales, ſeu diſſimiles dicuntur anguli, cum, vertice, & uno latere congruentibus, alterum non congruit: & ille major dicitur, cujus latus cadit extra. *Sic angulus B A E major eſt angulo B A C.*

Angulus non minuitur, vel augetur, licet crura minuas, vel augeas.

Porro quia anguli natura in linearum inclinatione conſiſtit, inclinatio autem linearum quantitas non eſt, neque angulus ullus quantitas erit. Et ſane eodem jure curvitas eſſet quantitas, quo angulus, cum ab invicem non magis differant, quam inflexio, & infractio. Quando igitur cum Euclide, aliiſque Geometris angulos æquales eſſe dicemus, nihil aliud, quam inclinationum ſimilitudo, hoc eſt, laterum congruentia indicabitur. Vide quæ de hac re plenius dicturi ſumus poſt propoſitionem 16. *l.* 3.

Fig. 2. 4. 13 Angulus rectilineus eſt, quem rectæ lineæ efficiunt: curvilineus, quem curvæ; mixtus, quem recta, & curva.

Fig. 6. 14 Cum recta (C A) ſuper rectam (B F) conſiſtens in neutram inclinat partem, ac proinde angulos utrinque facit æquales (C A B, & C A F,) rectus eſt uterque æqualium angulorum. Recta autem (C A) alteri inſiſtens dicitur perpendicularis, ſeu perpendiculum.

Angulus rectus ſic etiam definiri poteſt.

Fig. 6. Rectus angulus is eſt (B A C), cui a parte altera æqualis oritur (C A F,) ſi unum latus (B A) produxeris.

Duæ regulæ ſic compactæ, ut angulum rectum conti-

ti-

Digitized by Google

tineant, inſtrumentum efficiunt, quod norma appellatur. Illius inventorem Vitruvius cap. 2. lib. 9. affirmat Pythagoram. Tanta vero anguli recti vis eſt in rebus omnibus conſtruendis, dimetiendis, formandis, & firmandis, ut nihil fere effici ſine illo poſſit. Normæ examen ſic inſtituitur: ejus latus O E applica rectæ lineæ A F, & juxta latus alterum deſcribatur recta C A. Converſa deinde norma verſus B, ſi utroque ſuo latere congruat rectis C A, A B, ſcito eſſe legitimam, & exactam. Ratio patet ex ipſa def. 14.

15 Obtuſus angulus eſt (B A C), qui recto (F A C) major eſt. Fig. 7.

16 Acutus angulus eſt (L A I), qui recto (F A I) minor eſt. Fig. 8.

17 Figura plana eſt ſuperficies plana una, vel pluribus lineis undique terminata.

18. Circulus eſt plana ſuperficies, unius lineæ circuitu comprehenſa, quæ circumferentia dicitur, a qua ad aliquod punctum intra contentum (A) omnes, quæ duci poſſunt, rectæ lineæ ſunt æquales. Fig. 9.

19 Hoc vero punctum (A) centrum appellatur.

20 Diameter circuli eſt recta per centrum ducta (B C) ad circumferentiam utrinque terminata, & circulum bifariam dividens. Fig. 9.

21 Semidiameter, ſive radius eſt recta (A F) ex centro ad circumferentiam ducta. Fig. 9.

22 Semicirculus eſt figura (BLC) comprehenſa diametro (BC), & dimidia circumferentia (BLC.) Fig. 9.

Circulus ita generatur: ſi recta linea (A B) uno extremo ſuo (A) manente fixo in orbem circumagatur, recta ipſa circulum, extremitas illius altera (B) circumferentiam producet. Porro mira circuli indoles vel in ipſo exortu Fig. 9.

ſuo apparet. Ad ejus namque geneſin contraria concurrunt, motus, & quies, dum linea movetur, & ejus extremum quieſcit. Dein lineæ generantis puncta omnia, cum inæquales eodem tempore periodos abſolvant, diverſa celeritate moventur.

Tertio peripheria circulum ambiens conſtat quodammodo ex contrariis, & extremis ſine medio; ex concavo nimirum, & convexo, inter quæ rectum ita medium eſt, ut æquale inter magnum, & parvum, idque eo mirabilius eſt, quod ea contraria inſint lineæ nullam latitudinem habenti. Hæc tria Ariſtoteli viſa ſunt admiranda, ex quo illa deprompſimus. At prodigia circuli longe majora aperuimus in diſſertatione phyſico-Mathematica, quam una cum Cylindricis, & annularibus in lucem emiſimus anno 1652. *iſthic ea leget, qui volet.*

Circumferentiam Mathematici partiri ſolent in 360. *æquales partes (quas gradus vocant) ob multas illius numeri commoditates: ſemicircumferentiam in* 180. *quadrantem in* 90.

23 Rectilinea figura eſt ſuperficies plana rectis lineis undique terminata.

24 Triangulum, ſive trilaterum eſt plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. *Hæc figurarum rectilinearum prima, ac ſimpliciſſima eſt, in quam cæteræ omnes reſolvuntur.*

Fig. 10. 25 Triangulum æquilaterum eſt, quod tria latera habet æqualia.

Fig. 11. 12. 26 Triangulum Iſoſceles, ſeu æquicrure, quod duo tantum latera habet æqualia.

Fig. 13. 27 Scalenum, quod tria latera inæqualia habet.

Fig. 13. 28. Rectangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet rectum.

29 Ob-

Digitized by Google

29 Obtuſangulum triangulum eſt, quod unum angulum habet obtuſum. Fig. 12.

30 Acutangulum triangulum eſt, quod tres habet acutos angulos. Fig. 10. 11.

31 Inter figuras quadrilateras rectangulum eſt, quod quatuor angulos habet rectos, adeoque æquales; *ſive latera æqualia ſint, ſive non.* Fig. 14. 15.

32 Quadratum eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt, *ac proinde æquiangulum.* Fig. 15.

Omne quadratum eſt rectangulum, ſed non contra.

33 Rhombus eſt, qui æquilaterus, ſed non æquiangulus eſt. Fig. 16.

34 Rhomboides, quæ adverſa latera, & angulos habens æqualia, neque æquilatera, neque æquiangula eſt. Fig. 17.

35 Parallelogrammum eſt figura quadrilatera, cujus bina oppoſita latera (AB, FC, & BF, AC) ſunt parallela. Quid vero ſint parallelæ, dicetur ſequenti definitione. Fig. 14. 15. 16. 17.

Omne rectangulum, & quadratum eſt parallelogrammum, ut ſuo loco demonſtrabitur. Sed non contra.

36 Rectæ lineæ parallelæ, ſeu æquidiſtantes ſunt, quæ in eodem plano exiſtentes utrinque in infinitum protractæ, æqualibus ſemper intervallis inter ſe diſtant. Fig. 18.

Æqualia intervalla deſumuntur penes perpendiculares. Quare ſi omnes ad unam ex duabus parallelam A B perpendiculares Q L æquales fuerint, dicentur rectæ A B, C F parallelæ.

Generantur parallelæ, ſi recta L Q ad rectam A B perpendicularis, per A B ſemper perpendiculariter moveatur, tunc enim ejus extremum L deſcribit parallelum C F.

Euclides definit parallelas eſſe, quæ utrinque in infinitum productæ in neutram partem coincidunt. Verum, quia dantur lineæ, quæ ſimul in infinitum productæ, licet ad ſe mutuo appropinquent ad intervallum quovis dato minus, ac proinde, licet non ſint parallelæ, nunquam tamen concurrant, (cujuſmodi ſunt hyperbola, & recta linea; conchois, & linea recta; item duæ æquales parabolæ circa eundem axem deſcriptæ, & plures aliæ) non videtur per ſe notum eſſe, duas rectas, licet nunquam concurrant, fore ſemper æquali intervallo diſſitas, hoc eſt æquidiſtantes: poſſet enim quiſpiam objicere, fieri fortaſſis poſſe, ut etiam ipſæ, licet ad ſe mutuo ſemper appropinquarent, tamen nunquam concurrerent. Quare Euclidæa definitio par allelismi naturam non ſatis explicat.

Fig. 17. 37 Parallelogrammi, & cujuſvis quadrilateri diameter eſt recta (A F) per angulos oppoſitos ducta.

38 Figuræ planæ pluribus lateribus, quam quatuor comprehenſæ, multilateræ, ſeu multangulæ, ſeu græca voce polygonæ vocantur.

Fig. 19. 39 Rectilineæ figuræ externus angulus eſt, qui latere producto extra figuram oritur. *Tales ſunt FBC, GCA, HAB. Tot igitur figura qualibet habet externos angulos, quot latera, & angulos internos.*

Poſtulata.

Poſtulatum eſt, quod facile fieri poſſe per ſe ſit manifeſtum. Poſtuletur ergo, ut concedatur:

1 A quovis puncto ad quodvis punctum rectam lineam ducere.

2 Rectam lineam terminatam in directum, & continuum protendere.

3 Quo-

3 Quovis centro ad quodvis intervallum circulum deſcribere.

Axiomata:

Axioma eſt ſententia per ſe manifeſta:

1 Quæ eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt. Et quod uno æqualium majus, aut minus eſt, majus quoque, aut minus eſt altero æqualium: & converſim.

2 Si æqualibus addas æqualia, tota erunt æqualia.

3 Si ab æqualibus demas æqualia, quæ remanebunt, erunt æqualia.

4 Si inæqualibus addas æqualia, tota erunt inæqualia.

5 Si ab inæqualibus tollantur æqualia, quæ remanent, erunt inæqualia.

6 Quæ ejuſdem dimidia ſunt, inter ſe ſunt æqualia: & quæ ejuſdem ſunt dupla, vel tripla, vel quadrupla, inter ſe æqualia ſunt.

7 Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt: *Non recte Clavius hoc Axioma convertit.*

Falſum eſt enim, ea, quæ univerſim inter ſe æqualia ſunt, ſibi mutuo congruere: diſſimiles enim magnitudines poſſunt eſſe æquales, neque tamen congruent. Quod ſi ſimiles, & æquales fuerint, valebit converſa. Statuamus igitur axioma.

8 Si rectæ lineæ æquales fuerint, ſibi mutuo congruent: & anguli, ſi æquales fuerint, ſibi mutuo congruent.

9 Totum ſua parte majus eſt:

10 Omnes anguli recti inter ſe æquales ſunt:

Euclidis axioma undecimum eſt: Si in duas re-

Fig.20. ctas AB, CF incidens recta GI angulos ad eandem partem interiores BLQ, FQL, fecerit duobus rectis minores, duæ illæ rectæ ſi protrahantur, tandem concurrent ad illam partem, ad quam ſpectant anguli duobus rectis minores.

Hoc vero non eſt clarius illo, quod Prop. demum 29. l. 1. Euclides ipſe demonſtrat: videlicet; ſi anguli BLQ, FQL, fuerint duobus rectis æquales, recta AB, CF, nunquam concurrent.

Quare axioma illud e principiorum numero cum Gemino, & Proclo, aliiſque Geometris rejecimus: eſt enim non axioma, ſed theorema, idque demonſtrabimus poſt Propoſitionem 31. hujus libri.

Ejus loco alia duo ſequentia ſubſtituo, quorum Ex defi. 36. *veritas ex definitione paralleliſmi ſtatim apparet. Eſto igitur axioma.*

11 Parallelæ lineæ communi perpendiculo utuntur.

Hoc eſt, recta, qua ad parallelarum unam eſt perpendicularis, eſt quoque perpendicularis ad alteram.

Fig.21. 12 Perpendicula bina (LO, QI) ex parallelis æquales utrinque intercipiunt partes (LI, OQ.)

13 Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

Ad hoc ſiquidem opus eſt ad minimum tribus.

14 Duæ rectæ lineæ nequeunt habere ſegmentum commune; & omnes rectæ punctualiter ſe interſecant.

Fig.22. *Recta AX occurrat recta ZD, ea ſi producatur, non perget per DA, ſed in E, ſic ut rectam XB non niſi punctualiter interſecet. Axioma ex notione ipſa recta linea evidentiſſimum eſt. Tamen, quia nonnulli tam ſubtiliter philoſophantur, ut credant, rectas lineas aliqua ſui parte commiſceri*

ri poſſe, lubet in eorum gratiam hoc axioma amplius declarare.

Habeant, ſi fieri poteſt, duæ rectæ A X, A Z, partem communem A D. Centro A deſcribatur circulus ſecans rectas in B, & C, tum accipiatur arcus B F æqualis arcui B C, & intelligatur ducta eſſe recta F A.

Rectæ igitur C A, & F A eundem prorſus ſitum habent reſpectu rectæ B A. Sed recta C A cum recta B A habere dicitur commune ſegmentum D A, ergo etiam recta F A habet cum B A commune ſegmentum D A.

Tres jam igitur rectæ C A, B A, F A commune D A, ſegmentum habent.

Sumatur rurſus arcus FG æqualis prioribus BF, & CB, & intelligatur ducta eſſe recta G A. Rurſum liquet rectas B A, G A, eundem habere ſitum reſpectu rectæ F A; ſed jam oſtenſum eſt, rectam B A habere cum recta F A commune ſegmentum D A. Ergo etiam recta G A cum F A commune habet ſegmentum D A.

Jam ergo rectæ quatuor C A, B A, F A, G A commune D A ſegmentum habent. Eodem prorſus modo oſtendam ſi per totam circuli circumferentiam ſumantur arcus prioribus æquales, omnes ſimul circumquaque rectas lineas ductas ad A unum idemque habituras commune ſegmentum D A. Hoc tam immane abſurdum ſequitur ex eo, quod ponerentur bina rectæ C A, B A habere ſegmentum commune. Impoſſibile eſt igitur, ut duæ rectæ ſegmentum commune habeant.

In hoc axiomate vis tota nititur illius celebrati in ſcholis argumenti, quo demonſtratur, magnitudinem ex punctis omnino indiviſibilibus numero finitis componi non poſſe: & eſt ejuſmodi. Con-

ſtent,

ſtent, ſi fieri poteſt, magnitudines ex punctis. Circa idem centrum deſcriptæ intelligantur quotcunque circumferentiæ circulares, & ponatur extima, ſeu maxima componi ex centies mille punctis, a quibus ſingulis ad centrum commune ductæ intelligantur rectæ lineæ.

Ex axiomate jam explicato certum eſt, rectas illas nuſquam commiſceri, niſi in centro ſolo. Quare dum omnes medias peripherias pertranſeunt, in iis æque multa deſignant puncta, ac erant in extima. Omnes igitur circumferentiæ concentricæ æque multis punctis conſtant, ac proinde omnes inter ſe æquales erunt. Atque ita circumferentia hac in charta deſcripta æqualis probabitur circumferentiæ firmamenti. Aliis prope innumeris demonſtrationibus hic error obruitur, ſed unam illam hoc loco attuli præ cæteris, quod paſſim ſit decantata, & ex præſenti axiomate immediate pendeat.

Propoſitionum aliæ faciendum aliquid proponunt, & vocantur Problemata; aliæ in ſola contemplatione ſiſtunt, quæ idcirco Theoremata inſcribuntur.

PROPOSITIONES.

Citationes requiſitæ reperiuntur ad marginem: Cum citantur propoſitiones, primus numerus deſignat propoſitionem, littera (L) cum numero ſequenti librum denotat: ut ſi occurrat (per 5. l. 3.) ita leges (per propoſitionem quintam libri tertii). Figura quærenda ſemper eſt inter figuras ejus libri, in quo tum verſamur: citationes reliquæ facile intelligentur.

Traduntur hoc libro affectiones primæ triangulo-

gulorum, & parallelogrammorum. Propoſitiones illuſtriores ſunt 32. 35. 37. 41. 44. 45. 47.

PROPOSITIO I.

SUper data recta (A B) triangulum æquilaterum conſtituere. Fig. 23.

Centro A intervallo A B *a* deſcribatur circulus B C F, & centro B intervallo eodem B A deſcribatur circulus A C L priorem ſecans in puncto C, ex quo ducantur rectæ C A, C B. *a* Per Poſtul. 3.

Dico, triangulum A C B factum eſſe æquilaterum. Nam recta A C eſt *b* æqualis rectæ AB, cum ſint ejuſdem circuli F C B ſemidiametri; & recta B C etiam æqualis eſt eidem rectæ B A, cum ambæ ſint ſemidiametri circuli L C A. Ergo A C, B C *c* ſunt æquales inter ſe; ac proinde omnia latera trianguli ſunt æqualia. Ergo triangulum *d* A C B & æquilaterum eſt, & ſuper data recta A B conſtitutum, quod erat faciendum. *b* Per def. 18. *c* Per axio. 1. *d* Per def. 25.

PROPOSITIO II.

AD datum punctum (A) datæ rectæ (E F) æqualem ponere. Fig. 24.

Accipe circino *a* intervallum E F, & transfer ex A in D, erit recta A D par datæ E F. *a* Poſtul. 3.

PROPOSITIO III.

Fig. 24. *Datis duabus rectis inæqualibus, de majore (G H) minori (E F) parem auferre (G I.)*

b Poſtul. 3. Accipe circino *b* intervallum minoris datæ E F, & transfer in majorem ex G in I.

PROPOSITIO IV.

Fig. 25. *SI duorum triangulorum (XZ) latus unum (B A) uni (F L), & alterum (C A) alteri (I L) ſit æquale, angulique (A, & L) ab illis lateribus facti etiam ſint æquales, æquabuntur etiam & baſes (B C, F I), & tota triangula (XZ) & reliqui ad baſim anguli (B, F, & C, I), qui lateribus æqualibus opponuntur.*

Nam ſi intelligamus, triangulum Z triangulo X ſuperponi, latera L F, L I perfecte congruent *a* ſibi æqualibus lateribus A B, A C, ſic ut puncta tria L, F, I, cadant ſuper tria puncta A, B, C, ergo tum etiam baſis F I tota cadet ſupra totam baſim B C: ſed & anguli F, B, itemque I, C, totaque triangula ſibi mutuo tunc congruent. Omnia igitur per 7. ax. æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 8.

Scholium.

Fig. 25. *SImili fere ratiocinio theorema ſequens, cujus mox erit uſus, licebit demonſtrare.*

Si duorum triangulorum X, Z, latera B C, F I æqualia fuerint, & anguli illis lateribus adjacentes, nimirum B, & C, ipſis F, & I fuerint æquales, omnia reliqua, & triangula ipſa æqualia erunt.

Si latus F I imponas lateri ſibi æquali B C, illi

b con-

b congruet. Tum vero ob æqualitatem angulorum F, B, & I, C etiam c F L cadet ſupra B A, & I L ſupra CA. Ergo etiam punctum, L, incidet in punctum A; (ſi enim caderet extra A, latera FL, IL, non inciderent in latera B A, C A.) Ergo omnia ſunt per axioma 7. æqualia. b Per axio. 8. c Per axio. 8.

PROPOSITIO V.

Trianguli Iſoſcelis, ſeu æquicruris ad baſim anguli (A, C,) æquales ſunt. Fig. 26.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* ex hypotheſi æquale eſt latus A B lateri *c b*, & latus C B lateri *a b*, & angulus B angulo *b*; etiam *q* ad baſim angulus A angulo *c* æqualis erit. Quod erat demonſtrandum, iidem enim ſunt anguli C, & *c*. q Per 4. l. 1.

Corollarium.

Æquilaterum ergo triangulum, etiam & æquiangulum eſt.

PROPOSITIO VI.

Si in triangulo (ABC) duo anguli (A, & C) æquales fuerint, etiam latera (A B, C B) iis oppoſita æqualia erunt. Fig. 26.

Intelligatur triangulum A B C bis poſitum, ſed ſitu converſo *c b a*. Quoniam igitur in duobus triangulis A B C, *c b a* æquatur latus unum A C uni lateri *c a*, & angulus A angulo *c*, & angulus C angulo *a*; etiam reliqua omnia *o* erunt æqua- o Per Schol. prop. 4.

æqualia, ac proinde latus A B æquabitur lateri *c b*. Quod erat demonſtrandum, eædem enim ſunt lineæ C B, & *c b*.

Corollarium.

Æ*Quiangulum ergo triangulum, etiam æquilaterum eſt.*

PROPOSITIO VII.

E*St propter* 8. *quæ ſine illa ſeorſim propoſita demonſtrabitur.*

PROPOSITIO VIII.

Fig. 27. S*I duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo æqualia (AC ipſi EF; CB ipſi FI; AB ipſi EI;) etiam angulos omnes æqualibus lateribus oppoſitos habebunt æquales (C ipſi F; A ipſi E; B ipſi I.)*

Ponatur enim latus A B ſupra ſibi æquale E I. Tum vero punctum C vel incidet in punctum F, vel non. Si incidat in F, tota triangula congruent, ac proinde omnes anguli *a* æquales erunt. (*a* Per axio. 7.)

Fig. 28. Si C cadat extra F, ducatur FC. Quoniam per hypotheſim latera E F, A C æquantur, erit *b* angulus EFC par angulo ECF. ergo I F C major erit, quam ECF. ergo IFC multo major erit, quam ICF. Rurſum, quia per hypotheſim I F, B C æquantur, erit IFC *c* par ICF. Ergo IFC & multo major eſt, quam ICF, & æqualis, quod eſt impoſſibile. Ergo C non cadit extra F. Ergo &c. (*b* Per 5. l. 1.) (*c* Per 5. l. 1.)

Plures caſus, quos hoc theorema admittit, conſulto prætermiſi, ne tyrones fatigarem. Neque vero difficulter eorum demonſtratio ex demonſtratione jam poſita elicietur.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO IX.

D*Atum angulum rectilineum (IAL) biſariam ſecare.*

Ex lateribus anguli accipe circino æquales AB, AC; centris B, ac C deſcribe duos æquales circulos ſe ſecantes in F, ducaturque recta F A, hæc angulum biſecabit. Fig. 29.

Ducantur enim BF, CF; triangula FAB, FAC ſunt ſibi mutuo æquilatera; nam latera AB, AC ex conſtitutione æqualia ſunt; & latera BF, CF, quia æqualium circulorum ſemidiametri, etiam æquantur, & AF utrique triangulo commune eſt. Ergo anguli BAF, CAF *a* æquales ſunt. Biſectus eſt ergo datus angulus I A L Quod erat faciendum.

a Per 8. l. 1.

Corollarium.

HInc patet quomodo angulus ſecari poſſit in æquales angulos 4. 8. 16. &c, ſingulas nimirum partes iterum biſecando.

Scholium.

M*Ethodum ſecandi angulos in æquales quotcunque circino, & regula hactenus nemo docuit.*

Ex Pappo tamen, & Archimede habemus curvas quaſdam lineas, quadratricem videlicet, & ſpiralem, quarum adminiculo id obtinetur. Anguli triſectio perficitur a Pappo l. 4. prop. 31. præſidio hyperboles, quod etiam obtineri poteſt ope parabolæ, vel conchoides.

Mechanice datum angulum in quotcunque ſecabis æquales angulos, ſi ex anguli vertice A tanquam Fig. 30.

centro intra anguli crura arcum deſcribas, eumque dividas in quot placuerit æquas partes; rectæ enim ex A per diviſionum puncta emiſſæ angulum ſecabunt in partes totidem æquales.

PROPOSITIO X.

Fig.31. D*Atam rectam finitam (A B) ſecare bifariam.*

Super data AB fac triangulum æquilaterum *a* AGB. Angulum ejus G *b* biſeca per rectam G C, eadem biſecabit rectam A B datam.

a Per 1. l.1.
b Per præced.

Nam in triangulis X, Z latus C G eſt commune, & per conſtructionem G B, G A æqualia, angulique iis contenti A G C, B G C æquales. Ergo baſes AC, BC *c* æquantur. Biſecta eſt ergo data A B. Quod erat faciendum.

c Per 4. l.1.

Pro praxi ſatis erit centris A, & B, duos æquales circulos deſcribere ſe ſecantes in G, & L, ac ducere rectam GL.

PROPOSITIO XI.

Fig.32. E*X dato puncto (A) in data recta (LI) perpendicularem excitare.*

Circino cape æquales AC, A F. Centris C, & F deſcribe duos æquos circulos ſe ſecantes in B. Ex B ad A ducta recta erit perpendicularis.

Ducantur enim C B, F B. Triangula X, & Z ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo anguli CAB, FAB *a* æquales. Ergo BA *b* perpendicularis eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum.

a Per 8. l.1.
b Per deſin.14.

Praxis

Praxiſtam hujus, quam ſequentis expeditur facillime præſidio normæ.

PROPOSITIO XII.

EX dato extra rectam infinitam (L Q) puncto (A) perpendicularem ducere. Fig. 13.

Centro A deſcribe circulum, qui ſecet datam L Q in C, & I. Rectam C I biſeca *c* recta A B, ea erit perpendicularis. *c* Per 10. l. 1.

Ducantur enim A C, A I. Quoniam per conſtructionem triangula X, & Z, ſunt mutuo æquilatera, erunt anguli *d* CBA, IBA æquales. Ergo AB perpendicularis *e* eſt. Ex dato igitur puncto &c. Quod erat faciendum. *d* Per 8. l. 1. *e* Per def. 14.

PROPOSITIO XIII.

REcta (BA) ſuper rectam (C F) conſiſtens aut duos rectos angulos facit, aut duobus rectis æquales. Fig. 14.

Nam ſi B A inſiſtat perpendiculariter, erunt per def. 14. anguli BAC, BAF utrique recti; ſi vero B A inſiſtat oblique, excitetur *a* perpendicularis A L. Quia tum anguli inæquales CAB, FAB eundem locum occupant, quem duo recti CAL, FAL, ac proinde iis congruunt, erunt *b* his illi æquales. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 11. l. 1. *b* Per axio. 7.

Corollaria.

1 EOdem modo demonſtrabitur, ſi plures rectæ, quam una, eidem rectæ inſiſtant, angulos effici duobus rectis æquales.

Fig. 37. 2 Duæ rectæ invicem ſe ſecantes BAC, FAL efficiunt angulos quatuor rectis æquales. Patet ex propoſ.

Fig. 36. 3 Omnes anguli circa unum punctum conſtituti conficiunt quatuor rectos. Patet ex Corol. 1.; ſunt enim quatuor recti in plures partes ſecti.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 35. *SI duæ rectæ (XR, ZR) ad idem utrinque punctum rectæ (QR) faciant angulos (XRQ, ZRQ) duobus rectis æquales, (XR, ZR) unam rectam efficient.*

Si negas, faciant XR, BR unam rectam. Ergo anguli XRQ, BRQ *b* conficient duos rectos; quod *c* eſt abſurdum, cum ex hyp. XRQ, ZRQ duos rectos efficiant.

b Per 13. l. 1.
c Contr. axio. 9.

PROPOSITIO XV.

Fig. 37. *SI duæ rectæ (BC, FL) ſe ſecuerint in (A,) erunt anguli ad verticem (A) oppoſiti æquales.*

Nimirum LAB ipſi CAF, & BAF ipſi LAC. Nam, quia BA inſiſtit rectæ LF, erunt LAB, FAB, *a* pares duobus rectis. Et, quia FA inſiſtit rectæ BC, erunt *b* quoque FAC, FAB pares duobus rectis. Ergo *c* duo ſimul LAB, FAB æquantur duobus ſimul CAF, FAB. Ablato igitur communi FAB, remanent *d* æquales LAB, CAF. Eodem modo oſtendam, æquales eſſe BAF, LAC.

a Per 13. l. 1.
b Per eand.
c Per axio. 1.
d Per axio. 3.

PRO-

PROPOSITIO XVI. & XVII.

Continentur in prop. 32. Neque ante illam adhibentur.

PROPOSITIO XVIII.

In omni triangulo angulus (A) major eſt, qui majori lateri (BO) opponitur (B) minor, qui minori (AO) Fig. 38.

Nequit A eſſe par B, alias *a* latera BO, AO æquarentur contra hypotheſim. Nequit etiam A minor eſſe, quam B. Nam ſi A minor eſt, B major, poterit intra angulum B per rectam BF fieri angulus ABF æqualis A. Tum vero per 6. æquales erunt BF, AF, & ſi addas utrique, OF, erunt BF, FO æquales AO. Sed AO per hyp. minor eſt, quam BO. Ergo etiam BF, FO minores ſunt, quam BO, quod repugnat definitioni lineæ rectæ, quæ eſt omnium breviſſima. Angulus igitur A nec minor eſt angulo B, nec æqualis. Ergo major. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 6. l. 1.

PROPOSITIO XIX.

In triangulo latus (BO) majus eſt, quod opponitur majori (A) angulo. (AO) minus, quod minori (B). Fig. 38.

Eſt converſa prioris. B O non eſt minus, quam AO, alias per 18. angulus A eſſet minor angulo B contra hyp. Neque etiam BO æquale eſt AO; alias per 5. anguli A, B, æquarentur, rurſus contra hyp. Ergo BO ma-

jus eſt, quam A O. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XX.

Omnis trianguli duo qualibet latera reliquo ſunt majora.

Eſt Archimedis inſtar axiomatis; immediate ſiquidem patet ex definitione Archimedea lineæ rectę, quam vide ſupra in definitionibus.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 39. *Si a terminis unius lateris (AB) intra triangulum duæ rectæ junguntur (AO, BO) hæ lateribus trianguli (AC, BC) minores ſunt, majorem vero angulum (A O B) comprehendunt.*

a Per 20. l. 1. 1. Pars. Produc AO in F: AC, CF ſunt *a* majores, quam AF. Addita ergo communi F B, erunt AC, CB majores, quam AF, FB. Rurſum OF, FB, ſunt *b* majores, quam OB. Addita ergo communi AO, erunt AF, FB majores, quam AO, OB. Ergo AC, CB ſunt multo majores, quam AO, OB.

b Per eand.

2 Pars demonſtrabitur in Coroll. 2. partis primæ prop. 32. Ea interim non utemur.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. *Ex datis tribus rectis (BO, BL, LO,) quarum duæ qualibet reliqua ſint majores, triangulum conſtituere.*

Aſſuma-

Aſſumatur datarum una BL ; atque una ejus extremitate B accepta pro centro, intervallo alterius datæ B O deſcribatur arcus.

Deinde accepta pro centro extremitate altera L intervallo tertiæ LO deſcribatur arcus priorem ſecans in O; ducanturque rectæ BO, L O. Dico factum.

Demonſtratio patet ex conſtructione.

PROPOSITIO XXIII.

AD datum in recta punctum (B) angulum efficere æqualem dato (A.) Fig. 40.

Ducatur utcunque CF ſecans latera dati anguli A. In data recta ex B accipe BL parem AF. Centro B intervallo A C deſcribe circulum: item alium centro L intervallo FC, qui priorem ſecet in O. Ex O ad B, & L duc rectas.

Erit angulus LBO par dato A.

Nam per conſtr. triangula ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo per 8. anguli B, & A æquales.

Scholium.

IN gratiam tyronum viſum eſt hic nonnulla ad praxim angulorum neceſſaria proponere. Fig. 41.

Anguli menſura eſt circuli peripheria, quæ ex A vertice anguli tanquam centro deſcribitur, ut patebit ex prop. ultima lib. 6.

Itaque quot gradus continebit arcus BC inter anguli BAC crura interceptus, tot graduum dicetur eſſe angulus BAC. Et quoniam rectum angulum BAF metitur quadrans peripheriæ BF, gradus 90. continens, dicetur rectus angulus

eſſe graduum 90. *Similiter, quia duos rectos menſurat dimidia circumferentia in* 180. *gradus ſecta, & quatuor rectos circumferentia tota ſecta in gradus* 360. *dicentur duo recti efficere gradus* 180. *& quatuor recti gradus* 360. *His prænotatis praxes angulorum ſunt.*

Fig. 42. 1 *Ad datum in recta punctum B angulum ſtatuere parem dato A. Ex A dati anguli vertice tanquam centro inter latera arcum deſcribe CF. Centro B puncto dato deſcribe eodem intervallo arcum LZ, ex quo aufer LO parem CF. Per B, & O duc rectam; erit LBO par dato A.*

Fig. 43. 2 *Dati anguli OPQ gradus examinare. Fit hoc facillime per ſemicirculum corneum tranſparentem in* 180. *gradus diviſum. Centrum ſemicirculi pone ſupra P verticem anguli, & ſemicirculi radium PL ſupra anguli latus PQ. Arcus LO inter anguli crura interceptus oſtendet, quot graduum ſit datus angulus.*

Fig. 43. 3 *Angulum conſtruere datos continentem gradus, ut* 42. *Duc rectam XQ, in qua ſigna punctum P. Super P pone ſemicirculi centrum, ejuſque ſemidiametrum PL ſupra PQ. Ab L numera gradus* 42. *uſque in O. Per O ex P ducta recta dabit angulum OPL gradum* 42.

Horum omnium demonſtratio pendet ex ultima prop. lib. 6.

PROPOSITIO XXIV. & XXV.

Fig. 44. *SI duo triangula (BAC, BAF) duo latera (BA, AC) duobus (BA, AF) alterum alteri, æqualia habuerint; unum vero triangulum angulum illis lateribus contentum (BAF) majorem ha-*

habeat altero [BAC] habebit quoque baſim BF majorem baſi [BC.]

Et ſi baſim majorem habuerit, habebit angulum majorem.

Centro A deſcribe per C circulum; is tranſibit per F, quia AC, AF ponuntur æquales. Ergo BF cadit ſupra C. Junge CF. Angulus BCF eſt major angulo ACF, hoc eſt per Prop. 5. angulo AFC, hoc eſt multo major angulo BFC. Ergo *a* BF oppoſita majori angulo BCF major eſt, quam BC oppoſita minori BFC. *a* Per 19.1.1.

2 Pars patet ex prima parte, & ex prop. 18.

PROPOSITIO XXVI.

SI duo triangula [X, Z] duos angulos duobus æquales habuerint alterum alteri [B ipſi F, & C ipſi I,] & unum latus uni lateri æquale, vel quod inter æquales angulos exiſtit [ut BC, FI], vel quod uni æqualium angulorum opponitur [ut AC, LI], reliqua omnia erunt æqualia. Fig. 25.

Ponantur primo æqualia eſſe latera BC, FI inter æquales angulos poſita: tum vero, reliqua etiam omnia æqualia eſſe, demonſtratum eſt in ſcholio prop. 4.

Ponantur deinde latera AC, LI æqualibus angulis B, & F oppoſita eſſe æqualia. Quia anguli B, C per hyp. æquantur angulis F, I, etiam reliqui A, L æquales erunt per coroll. 9. p. 32. quæ ab hac non dependet. Ergo per primam partem omnia reliqua ſunt æqualia.

PRO-

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 45. & 40. *SI duas rectas [AB, CF] parallelas ſecuerit recta GO, erunt 1. æquales alterni anguli [RLO, item BLO, COL] 2. externus [GLB] æqualis interno ad eandem partem [LOF] [item GLR ipſi LOC.] 3. duo ad eandem partem interni ſimul [ALO, COL] æquales duobus rectis; item duo BLO, FOL duobus rectis æquales.*

Fig. 46. 1 Pars. Ex O, & L duc perpendiculares, OR, LQ, erunt *a* hæ ad utramque parallelam AB, CF perpendiculares, & per def. 36. inter ſe æquales. Æquales quoque *b* ex parallelis auferent partes RL, QO. Ergo triangula, X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt. Ergo *c* anguli RLO, QOL alterni æqualibus lateribus RO, QL oppoſiti, ſunt æquales. Quod erat primum. Ex quo patet etiam, alternos reliquos BLO, COL æquales eſſe; nam, quia tam BLO, ALO, quam COL, FOL æquantur *d* duobus rectis, erunt BLO, ALO æquales ipſis COL, FOL: ablatis ergo æqualibus ALO, FOL, erunt reliqui BLO, COL etiam æquales.

a Per axio. 11.
b Per axio. 12.
c Per 8. l. 1.
d Per 13. l. 1.

2 Pars. GLB æquatur ad verticem *e* oppoſito RLO, ſed RLO æquatur per 1. part. LOF, ergo GLB externus æquatur interno LOF. Quod erat alterum.

e Per 15. l. 1.

3 Pars. ALO per 1. partem æquatur FOL, atqui FOL cum COL *f* facit duos rectos, ergo etiam ALO cum COL facit duos rectos. Quod erat tertium.

f Per 13. l. 1.

PRO-

PROPOSITIO XXVIII.

SI duas rectas [AB, CF] ſecans recta [GO] alternos angulos [ALO, FOL] æquales fecerit, erunt [AB, CF] parallelæ. Fig. 47.

Si negas, ſit ergo alia XLZ per punctum L ad CF parallela.

Ergo *a* angulus XLO par eſt alterno FOL; quod fieri non poteſt, cum per hyp. ALO par ſit eidem FOL. *a* Per præced.

PROPOSITIO XXIX.

SI duas rectas [AB, CF] ſecans recta [GO] fecerit externum [GLB] æqualem oppoſito interno [LOF], vel duos ad eaſdem partes internos ALO, COL pares duobus rectis, erunt [AB CF], parallelæ. Fig. 45. vel 46.

Per 15. GLB æquatur ALO oppoſito ad verticem. Sed per hyp. GLB æquatur LOF. Ergo etiam ALO æquatur ſibi alterno LOF. Ergo *b* AB, CF ſunt parallelæ. *b* Per præced.

Deinde COL cum FOL facit duos rectos. Sed per hyp. idem COL etiam cum ALO facit duos rectos. Ergo ALO, FOL alterni æquales ſunt. Ergo rurſum AB, CF *c* ſunt parallelæ. *c* Per præced.

Corollarium.

EX ſecunda parte patet, omne rectangulum eſſe parallelogrammum.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45. *SI duæ rectæ [AB, CF] ſint parallelæ ad eandem rectam [DN], erunt inter ſe parallelæ.*

Patet per ſe, & ex præcedentibus. Nam ſi omnes ſecentur recta GO, erit *a* angulus externus GLB par interno LDN; eſt vero LDN externus *b* reſpectu DOF, ac proinde æqualis. Ergo etiam GLB par eſt LOF. Ergo AB, CF ſunt *c* parallelæ.

a Per 27. l. 1. *b* Per 27. l. 1. *c* Per præced.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 48. *PEr datum punctum [A] parallelam ducere ad rectam datam [CF]*

Ex A ducatur utcunque AL, ſecans datam FC. Ad punctum A fiat *d* angulus LAS par angulo ALF. Erit AS parallela ad CF, ut patet ex 28. cum alterni anguli SAL, FLA ſint æquales.

d Per 23. l. 1.

Praxis. Ducta AL, centro L deſcribe arcum IQ, & centro A eodem intervallo arcum OX, ex quo aufer OB parem IQ. Per A, & B ducta recta erit parallela.

Demonſtratio pendet ex 29. lib. 3.

Fig. 49. *Aliter. Centro quopiam P deſcribe circulum; qui tranſeat per datum punctum A, & ſecet datam CF in Q, & O. Arcui QA accipe æqualem ON, recta AN erit parallela.*

Demonſtratio pendet ex 29. libri 3. & ex 28. hujus.

Scho-

Scholium.

DEmonſtrata jam igitur eſt parallelarum theoria independenter ab axiomate, quod Euclides, ejuſque interpretes aſſumunt minus recte, cum non ſit axioma, ſed theorema, cujus veritas non magis per ſe apparet, quam ipſius 29. propoſitionis. Quia tamen deinceps ſæpius adhibebitur, id hoc loco jam facile ex præmiſſis demonſtrabimus.

Theorema.

SI recta MA incidens in rectas BC, AD faciat angulos internos ad eaſdem partes BAD, ABC, duobus rectis minores, recta BC, AD concurrent verſus eam partem, quam ſpectant anguli duobus rectis minores. Fig. 50.

Quoniam per hyp. CBA, DAB duobus rectis ſunt minores, fiant CBA, XAB duobus rectis æquales: eruntque BC, AX a parallelæ. Aſſumo tanquam axioma per ſe notum, inter rectas AD, AX in infinitum productas duci poſſe aliquam ad AM parallelam, puta ZX, quæ major ſit, quam AB. Accipiatur ipſi ZX æqualis AR, & junge ZR. Quoniam AR, ZX ſunt parallelæ, erunt b alterni XZA, RAZ æquales. Sunt autem & latera XZ, ZA æqualia lateribus RA, AZ per conſtr. Ergo etiam c anguli RZA, XAZ æquales ſunt. Ergo RZ eſt d parallela ad AX. Sed etiam BC eſt parallela ad AX. Ergo RZ, & BC ſunt e parallelæ. Eſt igitur BC & parallela ad RZ, & incluſa triangulo ARZ. Ergo cum produci in infinitum poſſit, neceſſario occurret aliquando rectæ AZ, nam neque evadere poteſt per ſibi parallelam RZ, neque pertingere in alio.

a Per 29. l. 1.
b Per 27. l. 1.
c Per 4. l. 1.
d Per 28. l. 1.
e Per 30. l. 1.

Demonſtratio Clavii eſt a parallelis independens,

ſed

Digitized by Google

ſed prolixiſſima, & multum operoſa: Procli nititur hoc principio, quod recta unam parallelam ſecans, etiam alteram ſectura ſit, ſi producatur. Verum hoc per ſe notum non eſt, ob rationem datam ad def. 36.

Corollarium.

Fig. 50. *HInc patet rectas non parallelas concurrere, de quo dubitari poterat ob rationem allatam ad def. 36. Sint rectæ non parallelæ BC, AZ. Duc AX parallelam ad BC; erunt XAB, CBA duo-*

a Per 27. l. 1. *bus rectis a æquales. Ergo ZAB, CBA ſunt duobus rectis minores. Ergo per theorema jam demonſtratum BC, AZ concurrunt.*

PROPOSITIO XXXII.

PARS I.

Fig. 51. *OMnis trianguli externus quivis angulus [FBC] duobus internis oppoſitis [A, & C] æqualis eſt.*

a Per 31. l. 1. Per B duc *a* BL parallelam ad AC. Quia duas parallelas BL, AC ſecat FA, erit externus

b Per 27. l. 1. angulus FBL interno A *b* æqualis. Et quia eaſdem parallelas BL, AC ſecat etiam recta BC,

c Per eand. erit LBC ſibi alterno C *c* æqualis. Ergo totus FBC æquatur utrique ſimul A, & C, quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

Fig. 51. 1 EXternus angulus [FBC] quolibet internorum oppoſitorum A, vel C major eſt.

Fig. 39. 2 Angulorum [C, & AOB eandem baſim [AB] habentium major eſt [AOB,] qui intra cadit.

Pro-

Producatur enim A O in F. A O B per hanc major eſt, quam OFB; & OFB per hanc eandem major eſt, quam C. Ergo AOB multo major eſt, quam C.

3 *Si ab uno puncto* [A] *in unam rectam* [BC] *incidant duæ rectæ, altera* [AO] *oblique, perpendiculariter vero altera* [AF;] *hæc cadet verſus partes acuti anguli* AOB. Cadat enim, ſi fieri poteſt, adverſus obtuſum A O C, puta in Q. Igitur acutus A O B erit externus reſpectu recti AQB, ac proinde illo major per coroll. 2. Quod eſt abſurdum. Fig. 55.

PROPOSITIO XXXII.

PARS II.

Omnis trianguli tres ſimul anguli duobus rectis ſunt æquales.

Ac proinde conficiunt gradus 180.

Produc unum latus AB in F. Externus angulus FBC duobus internis oppoſitis A, & C æqualis *a* eſt. Atqui *b* FBC cum CBA efficit duos rectos. Ergo etiam duo A, & C cum eodem CBA efficiunt duos rectos. Quod erat demonſtrandum. Fig. 52. *a* Per 1. partem hujus. *b* Per 13. l. 1.

Aliter. Ducatur HM parallela lateri AC. Anguli alterni tam O, A, quam N, C, æquales *c* ſunt. Sed O, Q, N conficiunt *d* duos rectos. Ergo etiam A, C, Q duos rectos conficiunt. Quod erat demonſtrandum. Fig. 53. *c* Per 27. l. 1. *d* Corol. 1. p. 13. l. 1.

Corollaria.

4 Tres ſimul anguli cujuſvis trianguli æquales ſunt tribus ſimul cujuſcunque alterius.

5 Si

5 Si in triangulo unus rectus eſt, reliqui ſunt acuti.

6 Si in triangulo unus eſt rectus, reliqui duo ſimul etiam unum rectum conficiunt.

7 In triangulo angulus, qui æquatur duobus reliquis, rectus eſt.

8 Cum ſcitur quot graduum ſit unus angulus, ſcitur etiam quot gradus faciant duo reliqui ſimul. Et cum ſcitur, quot gradus faciant duo anguli, aut eorum ſumma, ſcitur etiam, quot gradus efficiat tertius.

9 Cum in uno triangulo duo anguli aut ſinguli, aut ſimul, æquales ſunt duobus angulis aut ſingulis, aut ſimul in altero triangulo, etiam tertius tertio æqualis erit.

10 Cum duo triangula unum angulum æqualem habent, etiam reliquorum ſummæ æquantur.

11 Cum in Iſoſcele angulus æquis cruribus contentus eſt rectus, reliqui ad baſim ſunt ſemirecti. Et Iſoſcelis ad baſim anguli ſemper ſunt acuti.

12 Trianguli æquilateri angulus facit duas tertias unius recti; facit enim tertiam partem duorum rectorum, ergo duas tertias unius.

Fig. 54. 13 Hinc anguli recti [BAC] facillima triſectio, ſi ſuper AC fiat triangulum æquilaterum Z. Nam cum FAC ſint duæ tertiæ unius recti, erit BAF recti una tertia.

Fig. 55. 14 Perpendicularis AF eſt breviſſima omnium, quæ ex puncto [A] ad rectam aliquam duci poſſunt. Quoniam enim angulus F rectus eſt, erit per coroll. 5. AOF acutus. Ergo *a* AF minor, quam AO quælibet.

a Per 19. l. 1.

15 Ex uno puncto ad unam rectam tantum una perpendicularis cadit. Patet ex corollar. præced.

Scho-

Scholium.

Hujus pulcherrimi, fœcundiſſimique theorematis, cujus per Matheſim univerſam uſus prope immenſus, inventor eſt Pythagoras teſte Eudemo veteri geometra. Frequentiſſime ejuſdem meminit Ariſtoteles, qui illud etiam exemplum ſtatuit perfectiſſima demonſtrationis. Sed quemadmodum ex hac propoſitione jam didicimus, quot rectis angulis ejus anguli æquivaleant, ita ejuſdem beneficio, cujuslibet figuræ rectilineæ ſive interni, ſive externi anguli, quot rectos conficiant, præclare innoteſcet tribus ſequentibus theorematibus.

Theorema 1.

OMnis quadranguli quatuor ſimul anguli efficiunt quatuor rectos.

Nam ſi per oppoſitos angulos ducas rectam BF, hac quadrangulum in duo triangula ſecabit, quorum anguli ſimul conficiunt a *rectos quatuor.* Fig. 56. a Per 32. l. 1.

Theorema 2.

OMnes ſimul anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ conficiunt bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Ex quovis puncto A intra figuram ducantur ad omnes figuræ angulos rectæ, quæ ſecabunt figuram in tot triangula, quot habet latera. Quare cum ſingula triangula a *conficiant duos rectos, omnia ſimul conficient bis tot rectos, quot ſunt latera. Sed anguli circa punctum A,* b *conficiunt quatuor rectos. Ergo ſi ab omnium triangulorum angulis demas angulos circa A, anguli reliqui,* Fig. 57. a Per 32. l. 1. b Corol. 3. p. 13. l. 1.

qui componunt angulos figuræ, conficient bis tot rectos, demptis quatuor, quot ſunt latera figuræ.

Hinc patet, omnes ejuſdem ſpeciei rectilineas figuras æquales habere angulorum ſummas; quod admiratione dignum eſt.

Praxis. Duplica denominatorem figuræ: a producto aufer 4.; reſtabunt anguli recti, quos conficiunt anguli interni figuræ.

Theorema 3.

Fig. 58. OMnes ſimul externi anguli cujuſcunque figuræ rectilineæ, conficiunt quatuor rectos.

Nam ſinguli figuræ interni anguli cum ſingulis c Per 13. l. 1. *externis conficiunt duos* c *rectos. Ergo interni ſimul omnes cum omnibus ſimul externis conficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Sed (ut in præced. oſtendimus) interni ſimul omnes etiam cum quatuor rectis efficiunt bis tot rectos, quot ſunt latera figuræ. Ergo externi anguli, & quatuor recti æquantur.*

Mira ſane hæc figurarum rectilinearum proprietas eſt, ex qua illud etiam conſequitur, omnes cujuſcunque ſpeciei rectilineas figuras æquales habere externorum angulorum ſummas. Itaque trianguli alicujus tres externi anguli æquales ſunt mille externis angulis figuræ millelateræ. Quæ prorſus admiratione ſunt digna.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 59. *SI duas rectas æquales, & parallelas (AB, CF) jungant duæ aliæ (AC, BF) erunt etiam illæ æquales, & parallelæ.*

Parallelas AB, CF ſecet AF, erunt in triangulis

Q, R alterni anguli BAF, CFA *a* æquales. Ponitur autem latus AB æquale lateri CF, & AF utrique triangulo eſt commune. Ergo *b* baſes BF, AC æquantur (Quod erat primum.) Et anguli ad baſim AFB, FAC ſunt æquales: ac proinde AF incidens in rectas AC, BF facit alternos AFB, FAC æquales. Ergo *c* AC, BF ſunt etiam parallelæ. Quod erat alterum.

a Per 27. l. 1.
b Per 4. l. 1.
c Per 28. l. 1.

PROPOSITIO XXXIV.

PArallelogrammi oppoſita latera, & anguli æquantur, ipſumque a diametro biſecatur. Fig. 59.

Quoniam AB, CF ſunt *a* parallelæ, in easque incidit AF, erunt alterni BAF, CFA *b* æquales. Item quia AC, BF ſunt *c* parallelæ, in eaſque incidit AF, erunt *d* alterni CAF, BFA æquales. Ergo totus BAC toti BFC æqualis eſt. Eodem modo oſtendam B, & C æquales eſſe. Quod erat primum.

a Per def. 35.
b Per 27. l. 1.
c Per def. 35.
d Per 27. l. 1.

Quia vero jam oſtendi, triangula Q, R, quæ unum latus AF commune habent, etiam angulos lateri AF adjacentes habere æquales, nimirum BAF ipſi CFA, & CAF ipſi BFA. Erunt *e* etiam latera AB ipſi FC, & BF ipſi CA æqualia, itemque ipſa triangula.

e Per 26. l. 1.

Scholium.

PArtim ex hoc theoremate, partim ex definitione libro 2. præmittenda, facile elicitur dimenſio parallelogrammi rectanguli. Illius area producitur ex multiplicatione duorum laterum contiguorum AF, AC. Sit exem. gr. AF pedum 8. AC, 4. Duc 8. in 4. proveniunt 32. pedes quadrati pro area rectanguli. Fig. 60.

Digitized by Google

Fig. 61. *Quadrati vero area habetur ex uno latere (FI) per ſe ipſum multiplicato: ut ſi latus (FI) ſit 5. pedum, duc 5. in ſe, proveniunt 25. pedes quadrati pro area quadrati.*

Demonſtratio ex hac prop. patet ductis per laterum diviſiones parallelis.

PROPOSITIO XXXV. & XXXVI.

Fig. 62. *Parallelogramma ſuper baſi eadem (AB) vel æquali, & inter eaſdem parallelas (CQ, AX) conſtituta ſunt æqualia.*

Quia AL, BQ *a* ſunt parallelæ, eaſque ſecat CQ, erit *b* externus CLA par interno FQB. Deinde, quia tam CF, quam LQ æquantur *c* eidem AB, erunt CF, LQ æquales. Adde utriſque FL, erunt totæ CL, FQ æquales. Inſuper & AL, BQ *d* æquales ſunt. Triangula igitur CLA, FQB æqualia *e* ſunt. Ergo ablato communi FOL plana FOAC, QBOL remanent æqualia. Quibus utriſque adde planum AOB, fiunt parallelogramma tota ACFB, ALQB æqualia. Quod erat demonſtrandum.

a Per def. 35. *b* Per 27. l. 1. *c* Per 34. l. 1. *d* Per eand. *e* Per 4. l. 1.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. l. 6. Obſervent hic tyrones, quamvis parallelogramma inter eaſdem parallelas ſine fine productas in infinitam longitudinem extendantur ex eadem baſi AB, ſemper tamen manere æqualia ex vi demonſtrationis jam data.

Scho-

Digitized by Google

Scholium.

Ex hoc theoremate habetur dimenſio parallelogrammi cujuſcunque ABQL. Illius igitur area producitur ex altitudine QX, ſeu CA ducta in baſim AB. Fig. 62.

Nam area rectanguli CB parallelogrammo BL æqualis fit f *ex AC ducta in AB. Ergo &c.* f Per ſchol. præced.

PROPOSITIO XXXVII. & XXXVIII.

Triangula (ACB, AFB) ſuper baſi eadem (AB), vel æquali inter eaſdem parallelas (CI, AZ) conſtituta ſunt æqualia. Fig. 63.

Lateribus AC, AF duc parallelas BL, BI. Parallelogramma ACLB, AFIB ſunt *a* æqualia: ſed horum triangula data *b* ſunt dimidia. Ergo triangula data *c* ſunt æqualia. *a* Per præced. *b* Per 34. l. 1. *c* Per axio. 6.

Hæc propoſitio fiet univerſalis p. 1. l. 6. Idem hic tyrones notent in triangulis, quod eos notare juſſimus prop. præced. de parallelogrammis.

PROPOSITIO XXXIX. & XL.

Triangula æqualia (ACB, AFB) ſuper eadem baſi (AB), vel æquali ad eaſdem partes conſtituta ſunt inter eaſdem parallelas (AB, CF) Fig. 64.

Si negas, ſit CL parallela ad AB, & ducatur BL. Igitur ALB æquatur *a* ACB. Sed ex hyp. etiam AFB ipſi ACB æquale eſt. Ergo ALB, & AFB *a* Per præced.

æqualia ſunt, pars, & totum. Quod fieri non poteſt. Igitur &c.

PROPOSITIO XLI.

Fig. 65. *SI triangulum (AFB) ſit in iiſdem parallelis cum parallelogrammo (A L) & baſim eandem habeat (AB) vel æqualem, ipſius dimidium erit.*

a Per 37. & 38. l. 1. b Per 34. l. 1. Duc CB. Triangula AFB, & ACB *a* æquantur. Sed *b* ACB eſt dimidium parallelogrammi AL. Ergo etiam AFB eſt dimidium AL. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Fig. 65. *EX hac, & ex ſcholio prop. 35. diſcimus, aream trianguli (AFB) cujuſcunque produci ex dimidia altitudine (F I) ducta in baſim (AB), vel ex dimidia baſi in altitudinem. Quare noto uno latere trianguli, & altitudine, ſive perpendiculari, quæ in latus notum ex angulo oppoſito ducitur, habetur trianguli dimenſio: ut ſi baſis (AB) ſit pedum 100. altitudo (FI) 85. multiplica baſis dimidium 50. per 85. proveniunt 4250. pedes quadrati pro area trianguli (AFB): Porro altitudo, ſive perpendicularis illa, quando area trianguli peragrari poteſt, mechanice innoteſcit, uti latera. Si area peragrari nequeat, invenietur geometrice altitudo per 12. & 13. lib. 2. ut in ſcholio ibidem docebimus.*

In triangulo rectangulo altitudo eſt eadem cum alterutro latere circa angulum rectum. Hujus ergo ſemiſſis ducta in latus alterum recto adjacens dabit trianguli aream.

PRO-

PROPOSITIO XLII.

Dato triangulo (ACB) æquale parallelogrammum facere habens angulum parem dato (O.) Fig. 66.

Baſim AB biſeca in F. Per C duc CX parallelam *a* AB *a*. Fac *b* angulum BAL parem dato O. Duc FI parallelam AL *c*. Erit ALIF, quod quæritur. *a* Per 31. 1. 1. *b* 23. l. 1. *c* Per 31. l. 1.

Ducatur enim FC. Parallelogrammum AI angulum habet LAF parem dato O; & eſt æquale triangulo dato ACB, cum tam *d* triangulum ACB, quam *e* parallelogrammum AI, dupla ſint ejuſdem trianguli ACF. *d* Per 38. l. 1. *e* Per præc.

Corollarium.

Dato triangulo ACB habetur æquale rectangulum, ſi per C ducatur parallela lateri AB; & biſecta AB in F, ex B erigatur perpendicularis BQ. Erit enim rectangulum ſub FB, & QB par triangulo ACB. Fig. 66.

PROPOSITIO XLIII.

In parallelogrammo (BL) complementa (BO, OL) eorum, quæ circa diametrum (QA) exiſtunt (RF, & CS) ſunt æqualia. Fig. 67.

Si per diametri AQ punctum quodvis O ducatur CF parallela lateri AB, & RS parallela lateri BQ, ſecatur totum BL in quatuor parallelogramma, quorum duo circa diametrum ſunt RF, CS, duo reliqua BO, OL ſunt horum complementa.

Hæc eſſe æqualia ſic oſtenditur. Triangula ABQ, ALQ *f* æquantur ſimiliter ARO, OCQ *g* æquantur *f* Per 34. l. 1. *g* Per cand.

tur AFO, OSQ. Ergo ſi ab æqualibus ABQ, ALQ auferas æqualia, hinc ARO, OCQ, inde AFO, OSQ æqualia remanent BO, & OL. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XLIV.

Fig. 68. *AD datam rectam (O S) parallelogrammum conſtituere dato triangulo (V) æquale in angulo dato (X.)*

f Per 42. l. 1. Fac *f* parallelogrammum R C dato V æquale habens angulum ROC parem dato X, & pone latus RO in directum datæ OS. Per S duc g Per 31. l. 1. SQ *g* parallelam OC, cui occurrat BC producta in Q. Per Q, & O ducta recta occurrat BR protractæ in A. Per A duc A L parallelam ad O S, cui occurrant C O, & Q S productæ in F, & L. Parallelogrammum O L eſt, quod petitur.

i Per præc. Nam OL *i* æquatur RC, hoc eſt per conſtructionem dato triangulo V, & eſt ad datam k Per 15. l. 1. OS, habetque angulum *k* F O S parem angulo ROC, hoc eſt per conſt. parem dato X.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 69. *DAto rectilineo (CBA) æquale parallelogrammum conſtruere ad datam rectam (I Q) & in dato angulo (H.)*

Rectilineum reſolve in triangula A, B, C ducendo rectas FL, FI.

a Per 44. l. 1. Ad datam I Q in angulo dato H fac *a* parallelogram-

logrammum IV æquale triangulo A: tum producatur IR infinite verſus P: & ad rectam RV, in angulo VRP fac *b* parallelogrammum RZ æquale trigono B. Rurſum ad rectam SZ in angulo ZSP fac parallelogrammum SG æquale trigono C. Eſt IG parallelogrammum quæſitum. *b* Per eand.

Nam *c* angulus ZVR par eſt ſibi alterno IRV: Sed *d* QVR, & IRV ſunt æquales duobus rectis. Ergo etiam QVR, & ZVR duobus rectis æquantur. Ergo *f* QV, & ZV ſunt in directum. Pari modo oſtendam QZ, & GZ eſſe in directum. Ergo tota QVZG eſt una recta, & quidem parallela ad IX, cum per conſt. QV ſit ad IP parallela. Eſt vero etiam *g* XG parallela ad IQ, cum XG ſit parallela ad SZ, & SZ ipſi RV, & RV ipſi IQ. *c* Per 27. l. 1. *d* Per eand. *f* Per 14. l. 1. *g* Per 30. l. 1.

Ergo *h* IG eſt parallelogrammum: eſſe autem æquale petitur patet ex conſtructione. *h* Per def. 35.

Scholium.

Adjungo problema utile futurum ad praxim propoſitionis 14. *l.* 2. Fig. 70.

Dato quadrangulo B F rectangulum æquale deſcribere.

Reſolve in triangula per rectam AC. Ex oppoſitis angulis demitte perpendiculares BO, FI. biſeca AC in S. Ex S erige perpendicularem SL parem duabus BO, FI. Rectangulum ſub LS, & SA æquatur dato BF. Demonſtratio patet ex 42.

PROPOSITIO XLVI.

Fig. 71. A *Data recta (AB) quadratum deſcribere.*

Erige duas perpendiculares æquales datæ AB, nempe AC, BE, & junge CE. Dico factum.

a Per conſt. Cum enim anguli A, & B duo ſint *a* recti, erunt *b* AC, BE parallelæ: ſunt vero etiam *c* æquales. Ergo CE *d* AB ſunt parallelæ, & æquales. Ergo figura eſt parallelogramma, & æquilatera: anguli quoque omnes ſunt recti (cum enim A, & B ſint recti, etiam recti *e* erunt oppoſiti E, & C). Ergo figura AE eſt quadratum.

b Per 29. l. 1. c Per conſt. d Per 33. l. 1. e Per 34. l. 1.

PROPOSITIO XLVII.

Fig. 72. I*N omni triangulo (ABC) rectangulo quadratum lateris (AC), quod recto angulo opponitur, æquale eſt duobus ſimul reliquorum laterum (AB, CB) quadratis.*

Ducantur IC, BF, & BE parallela AF. Si angulis IAB, FAC rectis, ac proinde æqualibus addatur communis BAC, erunt toti IAC, FAB æquales. Sunt vero in triangulis IAC, FAB etiam latera, quæ æquales illos angulos continent, inter ſe *a* æqualia, nempe IA, CA ipſis BA, FA, alterum alteri. Ergo triangula IAC, FAB *b* æquantur. Quæ, quia cum parallelogrammis ABLI, & ZAFE conſiſtunt in iiſdem baſibus IA, FA, & in iiſdem parallelis IA, LBC, & AF, EZB ſunt *c* eorum dimidia. Ergo parallelogramma ABLI, ZAFE, utpote æqualium

a Per defin. quadrati 32. b Per 38. & 4. l. 1. c Per 41. l. 1.

ſium dupla, erunt æqualia inter ſe. Eodem diſcurſu ductis rectis AX, BR oſtendam parallelogramma EC, BX æqualia eſſe. Totum igitur AR utriſque IB, & BX æquale erit. Quod erat demonſtrandum.

Aſſumptum fuit LBC eſſe parallelam IA, adeoque LB, BC eſſe unam rectam. Id vero patet exp. 14. cum anguli LBA, & CBA ambo recti ſint per hypotheſim.

Scholium.

Hoc theorema [*quod propoſ.* 31. *lib.* 6. *Euclides ad omnes figuras ſimiles extendet*] *Pythagoricum appellatur paſſim, ab inventore Pythagora, qui, ut teſtantur Proclus, Vitruvius, aliique, Muſis victimas immolavit, quod ſe in tam præclaro invento ab iis adjutum putaret. Ignorabat videlicet ſcientiarum Dominum verum, & unicum omnis ſapientiæ auctorem Deum, aut certe, ſi cognovit, non ut Deum glorificavit. Frequens porro hujus theorematis, & eximius per Mathematicam totam uſus eſt, ac viam in primis ad incommenſurabiles magnitudines, arcanum ingens Geometricæ philoſophiæ, cognoſcendas aperit.*

Quadrati latus eſſe diametro incommenſurabile, celebratiſſimum eſt apud veteres Philoſophos, Ariſtotelem præſertim, & Platonem, adeo ut qui hoc neſciret, eum Plato non hominem eſſe, ſed pecudem diceret. Notitia porro hujus myſterii duxiſſe videtur originem ex hac propoſ. 47. *Nam cum in quadrato angulus A rectus ſit, erit quadratum diametri CB æquale quadratis laterum AB, AC, ac proinde duplum unius. Quare cum quadratum diametri CB ſit* 2. *& quadratum lateris AB ſit* Fig. 71.

uni-

unitas, erit diameter CB radix quadrata 2., & latus AB radix quadrata unitatis, ſive ipſa unitas, quarum proportio [ut ſuo loco demonſtrabitur] numeris explicari nequit, ac proinde incommenſurabiles ſunt.

Atque hoc vel unico argumento, tametſi cætera omnia deficerent, evidentiſſime conficitur, magnitudines ex definito punctorum numero componi non poſſe; alias enim nulla eſſent incommenſurabiles; omnium quippe menſura communis eſſet punctum.

His ſubjungo tria problemata ex eadem propoſitione deducta, quorum uſus frequentior.

Problema 1.

Fig. 73. *DAtis quotcunque quadratis unum omnibus æquale conſtruere.*

Dentur quadrata tria, quorum latera ſint AB, BC, CE. Fac angulum rectum FBZ infinita habentem latera, in eaque transfer BA, & BC, & junge AC. Erit ex AC quadratum æquale a quadratis AB, BC. Tum AC transfer ex B in X, & CE tertium latus datum transfer ex B in E, & junge EX: erit quadratum ex EX æquale b quadratis ex EB [ſeu EC], & ex BX: hoc eſt æquale tribus datis quadratis ex AB, ex BC, ex CE.

a Per 47. l. 1.

b Per eand.

Problema 2.

Fig. 74. *DAtis duabus rectis inæqualibus AB, BC, exhibere quadratum, quo quadratum majoris AB excedit quadratum minoris BC.*

Centro B intervallo BA deſcribe circulum. Ex C erige perpendicularem CE occurrentem peripheriæ

ria in E. Quadratum ex CE eſt exceſſus quæſitus.

Ducatur enim BE; quadratum BE, hoc eſt AB, æquatur c *quadrato BC, & quadrato CE. Ergo &c.* c Per 47. l. 1.

Problema 3.

NOtis duobus quibuſcunque lateribus trigoni rectanguli reliquum invenire. Fig. 76.

Latera rectum angulum ambientia ſint AC, AB, hoc 6. pedum, illud 8. Oporteat invenire, quot pedum ſit CB recto oppoſitum. Duc 6. & 8. in ſe ipſa, orientur laterum quadrata 36. & 64.: quorum ſumma eſt 100. Radix quadrata 100., nempe 10., dat pedes lateris BC quæſiti. Demonſtrat. patet ex 47. Nam ſumma quadratorum BA, & AC æquatur quadrato BC. Ergo horum ſummæ radix eadem eſt cum radice, ſeu latere BC.

Nota ſint deinde latera AB, BC, hoc 10. pedum, illud 6. Oporteat invenire AC. Lateris AB quadratum 36. aufer ex 100. quadrato lateris BC. Reſiduum 64. erit quadratum lateris AC. Radix ergo 64. [nempe 8.] dat pedes lateris AC.

PROPOSITIO XLVIII.

SI quadratum ab uno trianguli latere [AB] deſcriptum ſit æquale duobus reliquorum laterum [AC, BC] quadratis; angulus [ACB], quem reliqua latera continent, rectus erit. Fig. 76.

Si negas, erit angulus ACB recto major, aut minor. Ergo [ut demonſtrabitur propoſ. 12. &

13.

Digitized by Google

13. lib. 2. quæ ab hac non dependent] quadratum AB non erit æquale quadratis AC, BC, contra hypotheſim.

Vel ſic. Duc FC perpendicularem ad AC æqualem CB, & junge AF. Quadratum AF æquale eſt *a* quadratis FC, CA, hoc eſt *b* quadratis BC, CA, hoc eſt per hypot. quadrato AB. Ergo rectæ AF, AB æquales ſunt. Quoniam igitur trigona X, Z ſunt ſibi mutuo æquilatera; anguli ad C *c* ſunt æquales. Ergo *d* recti. Quod erat demonſtrandum.

a Per 47. l. 1.
b Per conſtru.
c Per 8. l. 1.
d Per def. 14.

ELE-

Digitized by Google

ELEMENTORUM

GEOMETRIÆ

LIBER SECUNDUS.

HIc Liber mole parvus, at præſtantia, ac utilitate theorematum plane magnus. Tyrones, ſcio, quod dico, nondum capient; ſed eſſe veriſſimum ulterius provecti, uſu ipſo certiſſime intelligent.

DEFINITIO.

PArallelogrammum rectangulum (AE) (quod rectangulum ſimpliciter ſine ullo addito appellari ſolet) contineri dicitur ſub duabus lineis rectis (AC, AF) rectum angulum comprehendentibus. Fig. 60. l. 1.

Nam earum altera AC altitudinem rectanguli, altera AF latitudinem determinat. Deinde ſi intelligatur latus AC ferri perpendiculariter per totam AF, aut AF per totam AC, producetur eo motu area rectanguli. Quare merito rectangulum fieri dicitur ex ductu, ſeu multiplicatione duorum laterum contiguorum.

Quando igitur dicitur ex. gr. rectangulum ſub (vel ex) AC, CB, vel brevitatis cauſa, rectangulum ACB, deſignatur rectangulum, quod continetur ſub AC, & CB ad rectum angulum conſtitutis. Similiter, cum dicitur rectangulum ſub AB, CB, vel rectangulum ABC, deſignatur rectan- Fig. 2. l. 2. Fig. ead.

ctangulum contentum ſub rectis AB, & BC rectum angulum comprehendentibus.

Rectangulum porro aliud eſt oblongum, aliud quadratum. Oblongum eſt, quod latera contigua habet inæqualia, ſive quod continetur ſub duabus rectis inæqualibus. Quadratum rectangulum eſt, quod ſub duabus æqualibus continetur.

NOTA.

Signum æqualitatis in hoc Libro eſt Æ.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig.1.l.2. *SI fuerint duæ rectæ (AB, AC) quarum altera (AC) ſecta ſit in quotcunque partes (AE, EF, FC) erit rectangulum ſub illis duabus (AB, AC), comprehenſum æquale rectangulis, quæ ſub inſecta (AB), & ſingulis ſectæ partibus (AE, EF, FC) continentur.*

Statue AB perpendicularem ad AC, per B duc infinitam BR perpendicularem ad AB. Ex E, F, C erige perpendiculares EI, FL, CQ. Erit BC rectangulum ſub AB, & AC; & eſt æquale rectangulis BE, IF, LC, hoc eſt (quia tam IE, quam LF ſunt *a* æquales AB) rectangulis ſub AB, AE, ſub AB, EF, ſub AB, FC.

a Per 36. & 34.l.1.

Scholium.

DEcem prima hujus libri theoremata etiam vera ſunt in numeris, ſi, ut lineæ, dividantur in partes. Rectangula numerica procreantur ex multiplicatione duorum numerorum; quadrata vero numerica ex multiplicatione numeri per ſe ipſum.

PRO-

PROPOSITIO II.

SI recta (AB) ſecta ſit utcunque (in C), duo rectangula ſub tota (AB), & partibus (AC, CB) comprehenſa quadrato totius æqualia ſunt. Fig. 2.

Accipiatur F æqualis A B.
Rect. FAB Æ b rect. FAC)
rect. FCB) b Per 1. l. 2.
hoc eſt, quia F, & AB ſunt æquales inter ſe.
Quad. ex AB Æ. rect. BAC)
rect. ABC.)

PROPOSITIO III.

SIt recta (AB) utcunque ſecta (in C), erit rectangulum ſub tota (AB) & partium alterutra (BC) comprehenſum, æquale rectangulo ſub partibus (AC, CB) una cum quadrato prædictæ partis (BC.) Fig. 3.

Aſſume F æqualem C B.
Rect. ABF Æ. d rect. ACF)
rect. CBF.) d Per 1. l. 2.
hoc eſt, quia æquales ſunt CB, & F.
Rect. ABC Æ. recta. ACB)
quad. CB.)

PROPOSITIO IV.

Fig. 4. *SIt recta (F L) utcunque ſecta (in O) : erit quadratum totius æquale quadratis partium (FO, OL), & bis rectangulo ſub partibus (FO, OL) contento.*

e Per 2. l. 2. Quad. FL Æ. *e* rect. FLO cum rect. LFO.

f Per 3. l. 1. Atqui rect. FLO Æ. *f* rect. FOL :) quad. OL)
& rect. L F O Æ. rect. L O F) quad. FO)

g Per eand. Ergo quad. FL Æ. *g* rect. FOL) quad. OL) rect. FOL) quad. FO)

Ideſt quad. FL Æ. rect. FOL bis quad. OL) quad. FO)

PROPOSITIO V.

Fig. 5. *SI recta (QX) ſecta fuerit æqualiter (in R), & inæqualiter (in S), erit rectangulum ſub inæqualibus partibus (QS, SX) contentum, una cum quadrato partis intermediæ (R S) æquale quadrato dimidiæ (QR.)*

b Per 1. l. 2. Rect. QSX *b* Æ. rect. QR, SX) rect. RSX)

Atqui

Atqui ob æqualitatem rectarum QR, RX.

Rect. QR, SX Æ. rect. RXS,

id eſt

c rect. RSX)
quad. SX.)

Ergo rect. QSX Æ. rect. RSX)
quad. SX)
rect. RSX)

c Per 3. l. 2.

Addatur utriſque quad. RS: habebitur

(rect. QSX Æ rect. RSX) id eſt
(quad. R S quad. SX) e quad. RX,
rect. RSX) ſeu QR
quad. RS)

e Per 4. l. 2.

PROPOSITIO VI.

SI recta (AB) ſit bifariam ſecta (in C), eique recta quadam adjiciatur (BF): erit rectangulum ſub tota compoſita (AF), & adjecta (BF) contentum, una cum quadrato dimidiæ (CB) æquale quadrato (CF) compoſita ex dimidia, & adjecta. Fig. 6.

Adde in directum L A æqualem adjectæ BF. Cum æqualibus A C, B C æqualia addantur AL, BF, erunt totæ LC, FC æquales. Unde L F ſecta erit æqualiter in C, & inæqualiter in B,

Ergo (rect. LBF. Æ. d quad. CF
(cum quad. C B

d Per præc.

Sed ob æqualitatem rectarum LB, & A F
rect. L B F Æ. rect. AFB.

(Ergo rect. AFB. Æ. quad. CF
(quad. CB.

PROPOSITIO VII.

Fig. 7. *SI recta (AB) fuerit utcunque ſecta [in C], erunt quadrata totius [AB], & ſegmenti alterutrius [AC] æqualia bis rectangulo contento ſub tota [AB], & ſegmento dicto [AC] una cum quadrato ſegmenti alterius [CB.]*

a Per 4. l. 2. Quad. AB a Æ. rect. BCA bis)
quad. A C)
quad. B C.)

Adde utriſque quad. A C. erunt
(Quad. A B Æ. rect. BCA bis)
(quad. AC quad. A C bis)
quad. BC)

Atqui rect. BCA bis cum quadrato AC bis
b Per 3. l. 2. æquatur b rectangulo BAC bis. Quare ſi pro BCA bis, & quad. AC bis ſubſtituamus BAC bis; erit
(Quad. A B Æ. rect. BAC bis)
(quad. A C quad. BC.)

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI recta [LF] fuerit ſecta bifariam in [I], eique quadam recta adjiciatur [FO], erit rectangulum [LIO], quod ſub [LI] dimidia, & [IO] compoſita ex dimidia, & adjecta continetur, quater ſumptum una cum quadrato adjecta [FO] æquale quadrato totius compoſita [LO,]*

Quad.

(Quad. IO a Æ. rect. OIF bis) a Per præc.
(Quad. IF quad. FO)
hoc eſt, quia ex hyp. FI, LI, ſunt æquales, ac proinde quad. FI eſt quad. LI, & rect. OIF eſt rect. OIL, ſeu LIO.

quad. IO Æ. rect. LIO bis)
quad. LI quad. FO)

Quare, ſi utriſque æqualibus addas rect. LIO bis, erit

(quad. IO
(quad. LI
(rect. LIO bis
id eſt
b quad. L O Æ. rect. LIO bis) b Per 4. l. 2.
quad. F O)
rect. LIO bis)
Id eſt
Æ. rect. LIO quater,)
& quad. FO.

PROPOSITIO IX.

SI recta [AC] ſit diviſa bifariam [in B], & non bifariam [in F] : erunt quadrata partium inæqualium [AF, FC] dupla quadratorum dimidiæ [AB], & partis intermediæ [BF.] Fig. 9.

quad. AF Æ. a rect. ABF bis) a Per 4. l. 2.
quad. AB.)
quad. BF.)

Addito igitur utriſque quad. FC

Digitized by Google

quad. AF Æ. rect. ABF bis)
quad. FC quad. A B)
quad. B F)
quad. FC.)

Sed rect. ABF eſt rect. CBF, quia AB, BC ſunt æquales ex hyp.

Ergo (quad. AF Æ. rect. C B F bis)
(quad. FC quad. A B)
quad. B F)
quad. F C)

b Per 7. 1.2. Atqui *b* C B F bis cum quad. F C æquantur quadrata BC, BF, ſeu AB, BF: quare ſi hæc illis ſubſtituas, erunt

(quad. A F Æ. quad. A B)
(quad. F C quad. A B)
quad. B F)
quad. B F.)
id eſt
quad. A B) bis
quad. B F)

PROPOSITIO X.

Fig. 10. *SI recta [FI] ſit biſecta [in L], eique quædam recta adjiciatur [IO]: erunt quadrata totius compoſitæ [FO], & adjectæ [IO] dupla quadratorum, quæ deſcribuntur ſuper dimidia [FL], & ſuper [LO] compoſita ex dimidia, & adjecta.*

Adjiciatur in directum QF æqualis IO. Quia ergo etiam FL, IL æquantur ex hyp. erunt totæ QL, OL æquales, ac proinde QO biſecta eſt in L, & aliter in I. Ergo.

quad.

Digitized by Google

(quad. QI Æ. *a* quad. QL) bis — *a* Per præc.
(quad. IO quad. LI)

Sed quad. QI eſt quad. FO, & quad. QL eſt quad. LO, & quad. LI eſt quad. FL.

Ergo (quad. FO Æ. quad. FL) bis
(quad. IO quad. LO)

PROPOSITIO XI.

Datam rectam [*AB*] *ita ſecare* [*in C*], *ut rectangulum* [*ABC*] *ſub tota, & una parte contentum, æquale ſit quadrato partis reliquæ* [*AC*]. Fig. 11.

Ex A erige perpendicularem AF parem AB. AF biſeca in X. Duc rectam XB, cui ex FA producta æqualem abſcinde XI. Tum abſcinde AC æqualem AI. Dico factum.

Perficiatur quadratum BAFS, & ducta per C perpendiculari perficiatur quoque rectangulum FILO. Quoniam FA biſecta eſt in X, eique adjecta eſt AI, erit

(rect. FIA Æ. *d* quad. XI. — *d* Per 6. l. 2.
(quad. XA

Id eſt

Æ. *e* quad. XB — *e* Per conſtr.

Id eſt

Æ *f* quad. BA — *f* Per 47. l. 1.
quad. XA)

Auferatur utrinque quad. XA. Erit rect. FIA, ſeu FL. Æ. quad. BA; ideſt AS.

Quare ablato rurſum communi AO

Erit AL. Æ. CS.

Atqui AL eſt quadratum AC, cum AI, AC ex conſt. ſint æquales: & CS eſt rect. ABC, cum BS ſit par AB. Ergo rectang. ABC æquatur quadrato AC. Datam igitur rectam ſecuimus, ut petebatur.

Scholium.

PRopoſitiones 10. prima hujus libri vera ſunt etiam in numeris. Hæc 11. numeris explicari non poteſt. Neque enim ullus numerus ita ſecari poteſt, ut productum ex toto in partem unam æquale ſit quadrato partis reliquæ. Porro mira vis eſt hujus ſectionis, de qua vide prop. 30. lib. 6.

PROPOSITIO XII.

Fig. 12. *IN trigono obtuſangulo [ACB] quadratum lateris [AB] obtuſo angulo oppoſiti quadrata laterum reliquorum [AC, BC] excedit rectangulo [BCF] bis, quod comprehenditur ſub [BC] latere alterutro obtuſum angulum [ACB] continentium, in quod, cum protractum fuerit, cadit perpendicularis [AF], & ſub [FC] intercepta exterius linea inter perpendicularem, & obtuſum angulum.*

a Per 47. l. 1. Quad. AB Æ. *a* quad. AF)
quad. BF)

b Per 4. l. 2. Sed quad. BF eſt *b* æquale quadratis FC, CB, & rect. BCF bis. Ergo, ſi hæc ſubſtituas pro quad. BF, erit

Quad.

Quad. AB Æ. quad. AF.)
quad. FC)
quad. CB)
rect. BCF bis)

Atqui quadrata AF, FC æquantur quadrato *c* AC. Quare hoc pro illis ſubſtituto erit *c* Per 47. l. 1.

Quad. AB Æ. quad. AC)
quad. CB)
rect. BCF bis)

PROPOSITIO XIII.

IN triangulo quocunque [ACB] quadratum lateris [AB] acuto angulo [C] oppoſiti a quadratis laterum reliquorum [AC, BC] exceditur rectangulo [BCF] bis, quod continetur ſub [BC] latere alterutro acutum angulum [C] comprehendentium, in quod cadit perpendicularis [AF] ab oppoſito angulo [A], & ſub [CF] intercepta inter perpendicularem [AF], & acutum angulum [C] Fig. 13. 14.

Quad. BC Æ. *a* rect. BFC bis) *a* Per 4. l. 2.
quad. BF)
quad. FC)

Et Quad. AC *b* Æ. quad. FC *b* Per 47. l. 1.
quad. AF

quare duo (quad. BC. Æ. rect. BFC bis)
ſimul (quad. AC. quad. BF)
quad. FC bis)
quad. AF.)

Atqui rectang. BFC bis cum quad. FC bis æquatur *c* rectangulo BCF bis; ergo hoc pro illis ſubſtituto *c* Per 3. l. 2.

Quad.

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis)
(quad. AC quad. BF)
quad. AF.)

d Per 47. l. 1. Atqui quadrata AF, BF, ſunt d quad. AB. Ergo hoc pro illis ſubſtituto

(Quad. BC Æ. rect. BCF bis)
(quad. AC quad. AB)

Hoc eſt BC, AC, quadrata excedunt quad. AB rectangulo BCF bis.

Corollarium.

Fig. 15. Vera eſt propoſitio, licet perpendicularis cadat extra triangulum. Demonſtratio fere eadem eſt.

Scholium.

Ex hac, & 47. lib. 1. habetur dimenſio cujuſcunque trianguli, cujus tria latera ſint nota, licet aream habeat imperviam. Horum quippe theorematum beneficio innoteſcit perpendicularis, etiamſi eam impedimenta loci non ſinant deſignari. Perpendicularis autem multiplicata per ſemiſſem lateris, cui incidit, producit aream trianguli, ut patet ex ſcholio propoſit. 41. lib. 1.

Fig. 13. vel 14. *Eſto trigonum quodcunque ACB nota habens latera. Oporteat notam reddere perpendicularem AF ex dato angulo A in latus oppoſitum BC.*

Quadratum lateris AB acuto C oppoſiti aufer ex ſumma quadratorum AC, CB. Per 13. reſiduum erit rectangulum BCF bis. Reſidui ſemiſſem [hoc eſt rectangulum BCF] divide per notum latus BC; proveniet recta CF. Quadratum rectæ CF aufer ex quadrato AC; reſiduum dabit quadratum b *AF, cujus radix quadrata dabit per-*

b Per prob. 3. ſchol.

pen-

pendicularem AF. poſt 47. l. 1.

Obtinere idipſum poteris etiam ex p. 12. Verum 13. *ſufficit, cum in omni triangulo perpendicularis ex aliquo angulo in latus oppoſitum, intra triangulum cadat.*

PROPOSITIO XIV.

Dato rectilineo [*QXZ*] *æquale quadratum conſtruere.* Fig. 16.

Rectilineo QXZ fac æquale *a* parallelogrammum rectang. CI, cujus latera IA, CA ſi æqualia fuerint, ipſum erit quadratum, quod petitur; ſi inæqualia ſunt, latus majus IA produc in L, donec AL ſit par AC. IL biſeca in Z; quo centro per I, & per L deſcribe circulum; & producatur CA, donec circumferentiæ occurrat in B. Quadratum rectæ AB æquale eſt dato QXZ. *a* Per 45. l. 1.

Ducatur enim recta ZB. Quoniam IL ſecta eſt bifariam in Z, & aliter in A, erit

(rect. IAL. Æ. *a* quad. ZL: hoc eſt *a* Per 5. l. 2.
(quad. ZA
Æ. *b* quad. ZB: hoc eſt *b* Per conſt.
Æ. *c* quad. ZA) *c* Per 47. l. 1.
quad. BA)

Ablato igitur utrinque quadrato ZA communi remanet,

rect. IAL Æ. quad. BA.

hoc eſt, quia AC, AL ſunt æquales, erit

rect. CI Æ. quad. AB.

Id eſt *d* rectil. QXZ. *d* Per conſt.

Scho-

Scholium.

COnſtructio Euclidæa requirit, ut per 45. *l.* 1. *rectilineum reducatur ad rectangulum. Quæ reductio cum ſatis operoſa ſit, fortaſſe expeditius problema abſolvetur hunc in modum.*

Rectilineum datum reſolvatur in tot quadrangula [*Z, X*], *quot poteſt. Tum ſingulis quadrangulis fac* a *rectangula æqualia. Si tunc ſuperſit* [*ut hic contingit*] *unum triangulum* [*Q*], *illi quoque fac* f *æquale rectangulum, ſingulis deinde rectangulis per hanc* 14 *fac quadrata æqualia: ac demum his omnibus quadratis unum æquale* g *fiat. Erit hoc æquale dato QXZ.*

a Per ſchol. p. 45. l. 1.

f Per coroll. p. 42. l. 1.

g Per prob. 1. ſchol. p. 47. l. 1.

ELE-

ELEMENTORUM GEOMETRIÆ

LIBER III.

PErfectiſſimæ inter planas figuras proprietates fundamentales hoc libro demonſtrantur. Libri utilitas vel hoc ſolo innoteſcit, quod tractet de circulo, rerum admirabilium per Matheſim univerſam fonte uberrimo. Theoremata illuſtriora ſunt 16. 20. 21. 22. 31. 32. 35. 36.

DEFINITIONES.

1 CIrculi æquales ſunt, quorum diametri, ſeu ſemidiametri ſunt æquales.

2 Recta (FB) circulum tangere dicitur, quæ circulo ſic occurrit (in B), ut tamen producta circulum non ſecet. Fig. 20. l. 3.

3 Circuli tangere ſe dicuntur, cum ſibi ſic occurrunt, ut tamen non ſecent. Fig. 13. & 14.

4 In circulo æqualiter a centro (A) diſtare dicuntur rectæ (BC, FL), cum perpendiculares (AI, AO), quæ ex centro in ipſas ducuntur, ſunt æquales. Fig. 18.

5 Segmenta, ſeu portiones circuli ſunt partes, in quas circulum dividit recta (CE) circulum ſecans. Fig. 37.

6 Angulus in ſegmento eſt (BQC), qui continetur ſub rectis lineis, quæ ad unum circumferentiæ pun- Fig. 33.

punctum (Q) ex ſegmenti terminis (CB) ducuntur.

Fig. 33. 7 Angulus (CQB) inſiſtere dicitur peripheriæ (BOC), quæ illi opponitur.

Fig. 11. 8 Sector eſt pars circuli a duobus ſemidiametris (AB, AF) & arcu (BF, vel BQF) quem ſemidiametri intercipiunt, comprehenſa.

PROPOSITIO PRIMA.

D*Ati circuli centrum invenire.*

Fig. 1. l. 3. Ducatur in circulo recta BC utcunque, quam biſeca in Q. Per Q duc perpendicularem LF. Hanc biſeca in A. Erit A centrum.

Si negas; centrum eſto O extra rectam FL, (nam in FL eſſe non poterit, cum ubilibet extra A dividatur inæqualiter) ducanturque BO, QO, CO. Quoniam igitur vis O centrum eſſe, erunt BO, CO æquales. Triangula igitur BOQ, COQ ſibi mutuo æquilatera ſunt, cum etiam ex conſtr. BQ, & QC ſint pares, & QO

a Per 8. l. 1. communis. Ergo *a* angulus OQC æquatur angu-

b Per defin. 14. l. 1. lo OQB. Ergo OQC *b* rectus eſt, ac proinde angulo LQC per conſtr. recto æquatur, pars toti. Quod eſt abſurdum.

Corollarium.

EX demonſtratis patet, ſi in circulo recta (LF) aliam (BC) bifariam, & perpendiculariter ſecat, in ſecante eſſe centrum.

Fig. 2. *Faciliime per normam invenitur centrum vertice Q ad circumferentiam applicato. Si enim recta DE jungentem puncta D, & E, in quibus norma latera peripheriam ſecant, biſcetur in A, erit A centrum. Demonſtratio pendet ex 31. hujus.*

PRO-

PROPOSITIO II.

SI in circuli ambitu duo puncta ſumantur [*B*, *C*], *recta, qua per illa ducitur, intra circulum cadit:* Fig. 2.

Accipiatur in recta BC quodvis punctum O, & ex centro A ducantur AO, AB, AC. Quoniam AB, AC æquantur, etiam *a* anguli B, & C æquales erunt. Quoniam igitur externus AOC *b* major eſt interno B, major erit quoque, quam C. In triangulo igitur OAC latus AC ſubtendens majorem angulum AOC majus eſt *c* latere AO ſubtendente minorem C. Cum igitur AC tantum pertingat ex centro ad circumferentiam, AO non pertinget. Ergo punctum O intra circulum cadet. Idem oſtendetur de quovis alio puncto rectæ BC. Tota ergo BC cadit intra circulum.

a Per 5. l. 1.
b Per coroll. 1. p. 32. l. 1.
c Per 19. l. 1.

Ex ipſa etiam notione lineæ rectæ, & circularis propoſitio eſt manifeſta.

PROPOSITIO III.

SI in circulo recta per centrum ducta [*B L*] *aliam* [*CF*] *non per centrum ductam ſecet bifariam, ſecabit quoque perpendiculariter. Et, ſi ſecet perpendiculariter, ſecabit bifariam.* Fig. 3.

1 Pars. Ex A centro ducantur AC, AF. Triangula X, Z ſibi mutuo æquilatera ſunt; nam CO, FO ex hypotheſi, & AC, AF, quia ex centro, æquales ſunt; AO vero communis eſt. Ergo *f* anguli AOC, AOF æquales. Ergo *i* recti.

f Per 8. l. 1.

³ Per def. 14. l. 1. · i recti. Quod erat primum.

2 Pars. Quia ex hyp. anguli AOC, AOF ſunt recti, erit quad. AC *o* æquale quadratis AO, CO; & quad. AF æquale quadratis AO, FO. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo ſimul AO, CO duobus ſimul AO, FO æqualia erunt. Quare ablato utrinque communi quadrato AO remanent CO, FO æqualia. Ac proinde etiam rectæ CO, FO ſunt æquales. Quod erat alterum.

o Per 47. l. 1.

PROPOSITIO IV.

Fig. 4. & 5.

SI in circulo duæ rectæ [*BC*, *FL*] *non ambæ per centrum ductæ ſe ſecent, non ſecabunt ſe mutuo bifariam.*

Fig. 5. Nam ſi una LF tranſeat per centrum, patet, hanc non biſecari ab altera BC, quæ ex hyp. per centrum A non tranſit.

Fig. 4. Si neutra per centrum tranſit, ex A centro duc AO. Si jam ambæ BC, FL forent biſectæ in O, anguli quoque AOC, AOL eſſent *a* recti, ac proinde æquales, totum, & pars. Quod fieri non poteſt.

a Per præc.

PROPOSITIO V. & VI.

Fig. 6. & 7.

CIrculi ſe mutuo ſecantes, aut interius tangentes non habent idem centrum.

Alias enim ductis ex communi centro A rectis AB, ACF, eſſent AC, AF (pars, & totum) æquales, quia ambæ ſunt æquales eidem AB.

Digitized by Google

PROPOSITIO VII.

SI in circulo quodvis aliud a centro [A] accipiatur punctum [C], ex quo recta plures CB, CL, CO, CF in circumferentiam cadant. Fig. 8.

1 *Maxima erit [CB], quæ per centrum tranſit.*

2 *Reliqua diametri pars [CF] minima.*

3 *Aliarum vero major eſt ea, quæ maximæ [CB] propior.*

4 *Neque plures, quam duæ ex dicto puncto [C,] quod a centro diverſum eſt, ad circumferentiam duci poſſunt æquales.*

Pars I. Ducatur ex A centro recta AL. Quoniam AL, AB æquales ſunt, addita communi AC erunt LA cum AC, & BC æquales. Sed LA, AC ſunt majores *b* quam LC. Ergo etiam BC major, quam LC. Eodem modo BC oſtendetur major quavis alia. *b* Per 20. l. 1.

Pars 2. Ex centro duc AO rectam. AO (hoc eſt AF) eſt minor *c* quam AC, CO. Ablata igitur communi AC remanet FC minor, quam CO. Eodem modo erit CF minor quavis alia. *c* Per eand.

Pars 3. In triangulis COA, CLA latera LA, AC æquantur lateribus OA, AC; Angulus vero LAC major eſt angulo OAC. *d* Ergo baſis LC major baſi OC. *d* Per 24. l. 1.

Pars 4. Patet ex præcedentibus. Nam ſi tres duci poſſent æquales CO, CI, CQ, forent duæ CQ, CI ad eandem partem inter ſe æquales. Quod repugnat parti 3.

PROPOSITIO VIII.

Fig 9. & 10. *SI a puncto extra circulum accepto [A] ad circulum ducantur plures recta [AB, AC, AF] AO, AQ, AR.]*

1 *Earum, quæ in cavam peripheriam incidunt, maxima eſt [A B] tranſiens per centrum [Z.]*

2 *Aliarum major eſt ea, quæ maximæ [A B] propior.*

3 *Extra circulum minima eſt [AO], quæ producta per centrum tranſit.*

4 *Quæ minimæ propior, minor eſt remotiore.*

5 *Non plures, quam duæ ex dicto puncto [A] in peripheriam duci poſſunt æquales, ſive intra circulum, ſive extra.*

Fig. 9. Pars 1. Ex centro Z duc ZC. Quia æquantur ZC, ZB; addita communi AZ, erunt AZ, ZC ipſi AB æquales. Sed AZ, ZC majores ſunt, *a* quam AC. Ergo etiam AB major AC. Eodem modo erit AB major quavis alia.

a Per 20. l. 1.

Pars 2. Duc ZF. Latera CZ, ZA æquantur lateribus FZ, ZA Angulus vero CZA major eſt angulo FZA. Ergo *b* baſis CA major baſi FA.

b Per 24. l. 1.

Fig. 10. Pars 3. Duc ZQ. Duæ AQ, QZ majores *c* ſunt, quam AZ. Ablatis igitur æqualibus ZQ, ZO remanet AO minor, quam AQ. Eodem modo AO minor erit quavis alia.

c Per 20. l. 1.

Pars 4. Duc ZR. Rectæ AQ, & QZ minores ſunt *d* quam AR, RZ. Ablatis ergo æqualibus ZQ, ZR remanet AQ minor, quam AR.

d Per 21. l. 1.

Pars

Pars 5. patet ex quatuor præced.

PROPOSITIO IX.

SI ab aliquo intra circulum puncto [A] plures quam duæ æquales ad ambitum duci poſſint, id punctum centrum erit. Fig. 11.

Patet ex 4. part. prop. 7.

PROPOSITIO X.

CIrculi in duobus tantum punctis ſe mutuo ſecant. Fig. 12.

Secent enim ſi fieri poteſt in pluribus B,C,F,: Ex A centro circuli L Q ducantur ad B, C F rectæ AB, AC, AF. Erunt hæ æquales. Quoniam ergo ex aliquo intra circulum OS puncto A ductæ ſunt tres æquales ad ejus peripheriam AB, AC, AF, erit A *f* centrum quoque circuli OS. Ergo circuli L Q, & OS ſe ſecantes habent idem centrum, quod repugnat propoſitioni 5.

f Per præc.

PROPOSITIO XI.

SI duo circuli ſe intus tangant, recta per eorum centra [A, & I] ducta tranſibit per contactum [B.] Fig. 13.

Si negas, habeant, ſi fieri poteſt, centra eum ſitum, ut recta per illa tranſiens cadat extra contactum B ſecans circulos in O, & L, ſintque centra

tra ipſa A, & C, ac junge AB, CB. Quoniam igitur CB, CO æquantur, addita communi AC, etiam AC, CB æquales erunt AO. Sed *b* AC, CB ſunt majores, quam AB, hoc eſt *c* quam AL. Ergo etiam AO major eſt quam AL, pars toto. Quod eſt abſurdum.

b Per 20. 1.1.
c Per defin. circ.

PROPOSITIO XII.

Fig. 14. *SI circuli ſe tangant exterius, recta conjungens centra per contactum tranſibit.*

Si negas; ſint, ſi fieri poteſt, centra ita poſita, puta in A, & B, ut recta per ipſa tranſiens per contactum S non incedat, ſed circulos ſecet in O, & Q, junganturque AS, BS. Erunt igitur *a* AS, SB majores quam AB. Sed AS *b* eſt par AO, & BS par BQ. Ergo etiam AO, BQ ſunt majores, quam tota AB, pars toto. Quod fieri non poteſt.

a Per 20. 1.1.
b Per defin. circ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 15. *CIrculi & ſeſe mutuo, & lineam rectam punctualiter tangunt.*

Tangant enim ſe intra (ſi fieri poteſt) duo circuli in parte circumferentiæ CL. Per centra A, & B ducta recta *b* tranſibit per contactum, puta in C. Ducantur inſuper AL, BL. Quoniam igitur *c* BL, BC æquantur (ſunt enim ex centro B ad peripheriam OLC) addita communi AB, erunt AB, BL æquales AC. Sed AC eſt par AL, (ſunt enim ex centro A ad peripheriam QLC). Ergo etiam AB, BL ſunt æquales AL, contra 20. lib. 1.

b Per 11. l. 3.
c Quia ex centro.

Tan-

Tangant ſe deinde exterius duo circuli, ſi fieri poteſt, in arcu OL. Recta AP centra A, & P jungens *d* tranſibit per contactum, puta in O. Ducantur inſuper AL, PL. Erunt igitur duo trianguli latera AL, PL æqualia ipſis AO, PO, ſeu toti AP, contra 20. lib. 1. Fig. 16. *d* Per 12. l. 3.

Denique recta BF, & circulus ſe tangant, ſi fieri poteſt, in parte aliqua CE. Ducantur ad centrum rectæ CA, EA. Erunt igitur CA, EA æquales, ac proinde triangulum CAE eſt iſoſceles; quare *e* anguli ACE, AEC acuti. Ergo perpendicularis ad BF ducta ex A centro cadet inter *f* C, & E, puta in D. Erunt igitur tam AC, quam AE æquales perpendiculari AD, quod eſt abſurdum, contra Coroll. 14. p. 32. l. 1. Fig. 16. *e* Per coroll. 11. p. 32. l. 1. *f* Per coroll. 3. p. 32. l. 1.

Corollarium.

Circuli, qui habent centra in una recta, eamque ſecant in eodem puncto B, ſe mutuo in puncto illo B contingunt. Fig. 17.

Cæterum hac propoſitio liquet etiam ex notione ipſa linearum, quæ comparantur. Neque enim aut recta linea, & curva circuli peripheria, aut peripheriarum inæqualium diverſæ curvaturæ, aut duæ connexæ ſecundum ullam ſui partem poſſunt congruere. Congruerent autem, ſi invicem in tota parte aliqua tangerent.

PROPOSITIO XIV.

In circulo æquales rectæ [BC, LF] æqualiter à centro diſtant; & quæ diſtant a centro æqualiter, ſunt æquales. Fig. 18.

Ex centro A ducantur AC, AF, item AO, AI

a Per 3. l. 3. ad angulos rectos ipſis BC, FL. Erunt *a* BC, FL biſectæ in O, & I.

Cum ergo totæ BC, FL ponantur æquales, etiam dimidiæ OC, IF, adeoque & quadrata ipſarum æquantur. Jam vero quad. AC *b* æquale eſt quadratis OC, OA; & quadratum AF æquatur quadratis IF, IA. Cum igitur quadrata AC, AF æqualia ſint, etiam duo quadrata OC, OA duobus IF, IA æqualia erunt. Ablatis igitur quadratis OC, IF (quæ ante oſtenſa ſunt æqualia) quæ remanent, quad. OA, IA æqualia erunt. Ergo etiam perpendiculares OA, IA ſunt æquales. Ergo BC, FL æquales a centro diſtant *c* æqualiter. Quod erat primum.

b Per 47. l. 1.

c Per def. 4. l. 3.

E converſo ſi diſtantiæ OA, IA ponantur æquales, tunc ablatis quadratis rectarum æqualium OA, IA: Eodem diſcurſu oſtendetur, quadrata reliqua OC, IF fore æqualia, ac proinde & rectas OC, IF æquales eſſe, quæ cum ſint *d* ſemiſſes rectarum BC, FL, etiam illæ æquales erunt. Quod erat alterum.

d Per 3. l. 3.

PROPOSITIO XV.

Fig. 19.

Rectarum circulo inſcriptarum maxima eſt diameter; cæterarum ea major, quæ centro propior.

Sit quævis RS alia a diametro FL. Ex centro duc AR, AS. Duæ AR, AS æquantur diametro FL, & ſunt *a* majores, quam RS. Ergo &c.

a Per 20. l. 1.

Sit deinde BI propior centro, quam XZ. Ex centro ad illas duc perpendiculares AC, AQ. Erit AQ *b* major, quam AC. Accipe ergo AO parum AC, & per O duc RS perpendicularem ad

b Per def. 4. l. 3.

ad AO, quæ *c* par erit BI, junganturque AR, AS, AX, AZ. Quia igitur A centrum eſt, erunt latera AR, AS æqualia lateribus AX, AZ. Angulus autem RAS major eſt angulo XAZ. Ergo baſis RS, hoc eſt BI, major *d* eſt baſi XZ. Quod erat demonſtrandum.

c Per præc.

d Per 24. 1. 2.

PROPOSITIO XVI.

Recta [*IF*], *quæ per* [*B*] *extremitatem diametri* [*CB*] *perpendicularis eſt, tota cadit extra circulum, eumque tangit* [*in B.*] *Neque inter ipſam, & circulum alia recta ad contactum* [*B*] *duci poteſt, quin circulum ſecet.* Fig. 20.

Pars 1. Accipiatur in recta IBF quodvis punctum L, ad quod ex centro A duc rectam AL. In trigono LAB, quoniam angulus ABL rectus eſt per hyp. erit ALB *a* acutus. Ergo AL oppoſita majori angulo ABL major eſt *b* quam AB, quæ minori ALB opponitur. Sed AB tantum pertingit ad circumferentiam. Ergo AL ultra circumferentiam porrigitur, ac proinde punctum L extra circulum eſt. Tota igitur IF extra circulum cadit. Quod erat primum.

a Per corol. 5. p. 32. l. 1.

b Per 19. l. 1.

Pars 2. Infra BF (ſi fieri poteſt) cadat RB tota extra circulum. Quoniam FBA rectus eſt per hyp. erit RBA acutus; ac proinde AB non eſt perpendicularis ad BR. Ducatur igitur ex A centro ad BR perpendicularis AO, quæ cadet *d* verſus R, & ſecabit circulum in Q. Igitur AB oppoſita majori angulo, nempe AOB recto, major eſt, quam AO, quæ opponitur minori, nempe acuto OBA. Sed AB par eſt AQ. ergo etiam AQ major eſt, quam AO, pars toto.

d Per coroll. 3. p. 32. l. 1.

Corollaria.

Fig. 20. 1 Hinc rurſum patet, contactum rectæ lineę, & circularis eſſe punctualem.

Fig. 17. 2 Si centris in eadem linea recta in infinitum protracta acceptis deſcribantur per B infiniti circuli tam minores primo BSC, quam majores, omnes tangent rectam IF in eodem uno puncto B.

3 Circuli igitur in amplitudinem quacumque data majorem excreſcentes propius ſemper, ac propius in infinitum tangenti appropinquant, nunquam tamen ei, præterquam in unico contactus puncto, conjunguntur, quod quamvis evidentiſſimum ſit, eſt tamen re vera admirabile.

Fig. 17. 4 Ex his manifeſtum eſt, lineam quamcunque in infinitum eſſe diviſibilem. Ducatur enim ab aliquo diametri puncto ad tangentem recta AQ. Infiniti circuli centra habentes in recta BA ſine termino productam rectam IF (per coroll. 2. hic) & ſe mutuo (per coroll. p. 13.) tangunt in uno eodemque puncto B, ac proinde nuſquam vel inter ſe, vel cum recta IF conjunguntur, præterquam in B. Ergo neceſſe eſt, ut rectam AQ dirimant in partes infinitas, hoc eſt in non tot, quin plures.

Fig. 20. 5 Angulum contingentiæ, ſeu contactus LBQ (eum nempe, qui tangente, & peripheria continetur) nulla recta linea poteſt dividere.

Fig. 17. 6 Per circumferentias tamen in eodem puncto tangentes ſecari poteſt, ac minui in infinitum. Atque in hoc, & tertio corollario latet totum myſterium aſymptoticum, hoc eſt lineæ rectæ ad Hyperbolam una ſecum in infinitum productam accedentis ad intervallum quocunque dato minus,

nun-

nunquam tamen concurrentis, quod præclare obſervavit, & demonſtravit Marius Bettinus noſter in Apiariis, & ante illum Barocius, atque Cardanus ex Rabbi Moyſe Narbonenſi, cujus demonſtrationem refert Cardanus de ſubtilitate lib. 16.

Scholium.

Demonſtratur, & ſolvitur fallacia paradoxorum, quæ ex angulo contactus deduci ſolent.

Atque hæc quidem ex 16. *prop. hactenus deducta & mira, & certa ſunt. Quæ vero deduci ex eadem ſolent præterea, omnem captum humanæ mentis excedunt. Quare ſuſpicari aliquando cœpi latere hic aliquid, cujus ignoratio ſubtilibus etiam ingeniis illuderet, & paradoxis illis immanibus aſſerendis anſam præberet. Et plane, quod ſuſpicatus ſum, ita ſe habere, mihi tandem videor deprehendiſſe. Paradoxa, quæ ex* 16. *inferri ſolent ex aliis multis, hæc fere præcipua ſunt.*

1 *Angulus contingentiæ* [*OAC*] *omni acuto minor eſt. Acutus eſto PAC, ab hoc auferri poteſt dimidius, & a reſiduo iterum dimidius, & ſic deinceps ſine termino. Quo pacto acutus fiet quocunque dato minor; quantumvis tamen in infinitum minuatur, ſemper tamen reſidui anguli ex. gr. anguli QAC, latus unum QA* a *intra circulum* [a] *cadet, ac proinde angulus contactus OAC intra acutum continebitur, ejuſque pars erit, ideoque illo minor.* Fig. 21. [a] Per 16. l. 3.

2 *Angulus ſemicirculi, licet recto minor ſit, eſt omni acuto major. Quia ob eandem cauſam acutus quantumvis magnus BAQ intra ſemicirculi*

angu-

angulum BAO comprehenditur.

Hæc duo in ipſo textu propoſitionis inferuntur: Quamvis nonnulli dubitent, Euclidis ea ſint, an ab aliquo adjecta. Apollonius certe magnus geometra, cum eandem affectionem in ellipſi, hyperbola, & parabola demonſtrat, has illationes prætermittit.

3 Angulus rectus CAB, [imo acutus quicunque CAQ] continet infinitos æquales angulos contactus, ac proinde infinities illo eſt major. Nam angulus CAB dividi poteſt in acutos infinitos minores ſemper, & minores, quorum nihilominus ſinguli ſunt majores b angulo contactus OAC.

b Per parad.1.

4 Angulus contactus CAO eſt vera pars anguli recti CAB; eundem quippe una cum ſemicirculi angulo OAB conſtituit: nequit tamen ulla ſui multiplicatione ſuum totum adæquare; ac proinde hic infinita æqualia ſibi addita non efficiunt infinitum.

5 Tranſitur a minori ad majus, & per omnia media, neque tamen per æquale. Sive datur majus aliquo, & datur eodem minus, neque tamen datur eidem æquale. Nam ſi recta AB fixo manente puncto A moveatur, donec congruat cum tangente, deſcribet acutos angulos BAP, BAQ, & omnes alios poſſibiles, qui quamvis ſemper augeantur, ſemper tamen erunt minores c ſemicirculi angulo BAO; quamprimum vero AB congruet tangenti CA, immediate habetur rectus CAB major angulo ſemicirculi.

c Per parad.2.

Hæc, & plura alia ex hac 16. propoſitione deduci ſolent, quæ profecto, ſi ita, ut proponuntur, ſeſe habeant, merito incomprehenſibilia videri poſſent. Peletarius, ut his paradoxis ſe expediat, negat, angulum contactus eſſe quantum. Rem confecerat, ſi dixiſ-

dixiſſet, nullum angulum eſſe quantum. Sed is vehementer errat, cum inde infert, omnes ſemicirculi angulos eſſe æquales, quod plane non inferret, ſi intelligeret, quod de contactus angulo aſſeruerat, omnibus angulis convenire. Neque tamen Clavio noſtro in ſua illa adverſus Peletarium apologetica diſputatione aſſentior. Mea quidem ſententia uterque fallitur, hic dum omnes omnino angulos eſſe putat quantitatem, ille, dum omnes, præter angulum contingentiæ. Alii, ſe, exiſtimant, hac una reſponſione omnes difficultates ſolvere, ſi dicant, curvilineos angulos, & rectilineos eſſe incomparabiles, rogati vero, cur ſint incomparabiles, reſpondent, quia angulus contactus quantumcunque multiplicatus nunquam poteſt æquare rectum, vel acutum.

Atqui hoc eſt paradoxum omnium maximum, cujus explicatio petebatur, qui nimirum fieri poſſit, ut angulus contactus anguli recti pars ſit, & tamen quotieſcunque multiplicatus eumdem ſuperare nequeat. Reſpondent, angulum contactus non eſſe partem recti, quia eum non poteſt adæquare. At paradoxorum aſſertores replicant hinc ſolum ſequi, non eſſe partem recti aliquotam, veram tamen eſſe partem, eo quod cum ſemicirculi angulo rectum componat. Unde qui hac via difficultates propoſitas volebant diſſolvere, debuerant oſtendere, angulum contactus nullo ſenſu partem eſſe rectilinei anguli, neque addito ſibi ſemicirculi angulo rectum componere: id quod facturi deinceps nos ſumus.

Mihi videtur res omnis ex Euclidæa definitione Def.8.l.1. *anguli pendere. Hac enim, ſi penitus expendatur, manifeſte docet, nullum angulum eſſe quantum, quo uno errore ſublato, paradoxa omnia evaneſcunt. Sentio igitur*

1 *Nul-*

1 *Nullus angulus eſt quantitas, ſed modus quantitatis. Sic enim habet defin.* 8. *lib.* 1. *Angulus planus eſt duarum linearum, &c. alterius ad alteram inclinatio. Atqui linearum inclinatio non eſt quantitas, ſed modus quantitatis: cum enim curvitas non ſit quantitas, cur inclinatio ſit, quæ ab illa non magis differt, quam inflexio, & fractio? Deinde. Si angulus eſſet quantus, foret vel linea, vel ſuperficies, vel corpus. Non eſſe lineam, aut corpus patet. Sed neque ſuperficies eſt, ea enim ablatione partium*
Fig.22. *C, B, minuitur, non angulus. Neque poteſt dici, angulum eſſe ſuperficiem indeterminatam, cum angulus quilibet determinatus ſit.*

2 *Quoniam anguli non ſunt quantitas, ſed modus quantitatis, eorum inter ſe comparatorum relatio non eſt æqualitas, & inæqualitas, ſed ſimilitudo, & diſſimilitudo.*

3 *Cum igitur anguli inter ſe comparati æquales dicuntur, aut inæquales, non aliud intelligi poteſt, quam eos ſimiles eſſe inter ſe, & diſſimiles. Maluit tamen Euclides æquales, & inæquales dicere ob multas horum terminorum in angulis rectilineis commoditates. Quem proinde loquendi modum etiam nos retinebimus.*

4 *Similes porro anguli ſunt, quorum ambo latera ſuperimpoſita congruunt. Diſſimiles, quorum non congruunt latera. Angulus enim nihil eſt aliud, quam inclinatio linearum alterius ad alteram. Ergo ſimiles anguli ſunt inclinationes linearum ſimiles. Non ſunt autem inclinationes linearum ſimiles, niſi ambæ ſibi mutuo impoſitæ congruant. Ergo ſimiles anguli ſunt, quorum congruunt latera, diſſimiles, quorum non congruunt.*

5 *Itaque manifeſtum eſt, nullum angulum curvili-*

vilineum æqualem dari poſſe ulli angulo rectilineo. Nam æqualitas angulorum non aliud eſt, quam ſimilitudo [per concluſ.2. & 3.] Similitudo angulorum eſt ſola laterum congruentia [per concluſ. 4.] Laterum congruentia haberi nequit, dum angulus curvilineus imponitur rectilineo. Ergo &c. Errat igitur Proclus, dum deſcriptis æqualibus ſemicirculis ita ratiocinatur: Æqualium ſemicirculorum anguli EAD, CAB æquales ſunt. Ergo ſi his addatur communis angulus CAD, erit angulus EAC curvilineus æqualis rectilineo DAB. Fallit ne ergo axioma, ſi æqualibus addas, vel demas æqualia, tota, vel reliqua erunt æqualia? Nequaquam; hoc enim ad res quantas ſolum pertinet; anguli porro quanti non ſunt. Axioma, ut in angulis valeat, ita formari, ac intelligi debet. Similes anguli ſi apponantur ſimilibus angulis, ſimiliterque poſitis, qui tum orientur, erunt ſimiles. At Proclus comparat angulos ſimiles quidem: ſed communis, qui utrìſque additur, cum ab una parte habeat latus rectum, ab altera curvum, diſſimiliter utrìſque additur. Fig. 23.

6 *Quare, cum tota eſſentia anguli ſit linearum ſe tangentium inclinatio, non erit unus angulus pars alterius, una ſiquidem inclinatio pars alterius inclinationis non eſt, neque angulus auferri ab angulo poterit; inclinatio ſiquidem una auferri nequit ab altera, &c. Hæc enim non laterum inclinationibus, quæ quantitas non ſunt, ſed ſuperficiebus inter latera conſtitutis conveniunt.*

7 *Poſtremo ex jam dictis colligemus, quomodo intelligi debeant illæ locutionum formæ, quibus Geometræ paſſim, atque ipſe in primis Euclides, utuntur, cum angulos ſecari, augeri, imminui, alterum alterius duplum, triplum, aliaque ſimilia aſſerunt.*

Hæc

Hæc ſane exiſtimabimus, eos non proprie, ſed analogice tantum angulis tribuere; itaque eos loqui voluiſſe, quod id commodius, & expeditius eſſet; neque tamen obnoxium periculo, modo in angulis rectilineis maneatur. Angulum itaque dividi re-
Fig.24. *cta DA, non aliud erit, quam inter latera E A, CA aliam interponi lineam, qua novas duas cum utroque latere inclinationes, hoc eſt duos novos angulos efficiat. Angulum vero E A C eſſe duplum anguli EAD, nihil rurſum aliud erit, quam inter lineas rectas EA, CA aliam interponi, quæ ad utramque ſimiliter inclinetur, unde fiat, ut recta EA, DA rectis CA, DA inclinationibus non mu-*
Fig.24. & 25. *tatis impoſita congruant. Quod ſi ita ratiocinentur: [Angulus EAD eſt æqualis angulo ILQ, & DAC eſt æqualis QLR. Ergo totus E A C toti ILR æqualis eſt.] Idem erit ac ſi dicatur: Inclinatio rectarum EAD ſimilis, ſeu eadem eſt inclinationi rectarum I L Q, & inclinatio rectarum DAC ſimilis eſt inclinationi rectarum QLR. Ergo etiam inclinatio rectarum EAC ſimilis erit inclinationi rectarum ILR, vel certe [quod recidet in idem, ex aſſertione quarta ſupra] collectionem illam ſic intellige. Latera E A D congruunt lateribus ILQ, & latera DAC congruunt lateribus QLR. Ergo latera quoque EAC congruent lateribus ILR. Quæ quidem conſecutio æque clara eſt, atque ſi æqualibus addas æqualia, tota æqualia eſſe. Ad eum modum locutiones cæteras, quæ, cum ſint quantitatis propriæ, ad angulos transferuntur, facile, veritate theorematum ubique ſalva, interpretabimur.*

His ita conſtitutis, facile paradoxa angularia diſſolvemus, quæ ſane non aliunde enata ſunt, quam quod

quod angulos eodem, quo cæteras quantitates, habuerint loco. Ut igitur ſimul omnia expediam, dico, paradoxa illa, ſi in proprio verborum ſenſu accipiantur, ad unum omnia eſſe falſa. Sic enim accepta non conveniunt niſi quanto; anguli autem quanti non ſunt, ut jam oſtendimus.

Itaque angulus contactus neque minor eſt quovis acuto, neque pars eſt anguli rectilinei, neque in rectilineo continetur infinities, imo ne ſemel quidem; nihil enim horum linearum inclinationi poteſt competere, quæ tota anguli eſſentia eſt. Si vero non proprie, ſed analogice accipiantur, jam nihil continent, quod a communi ſenſu, ac ratione alienum ſit. Sic enim angulum contactus O A C eſſe minorem quovis acuto, & ſemicirculi angulum O AB acuto omni majorem, non aliud ſignificabit, quam infra tangentem C A nullam poſſe duci rectam ad contactum, quin ſecet peripheriam. Quæ quidem circuli proprietas eſt omnino digna, quam homines admirentur, eſt tamen ejuſmodi, quam poſſimus intelligere, & quæ nihil cum ratione pugnans involvat. Non alius paradoxi tertii, quarti, & quinti ſenſus erit. Atque ita unius Euclidææ definitionis ductu, rite perſpecta natura anguli, omnes immanium paradoxorum tenebræ evaneſcunt. Fig. 21.

PROPOSITIO XVII.

A *Puncto dato* [*B*] *rectam ducere, quæ datum circulum* [*OQ*] *tangat.* Fig. 26.

Ex A dati circuli centro ducatur ad datum punctum B recta AB ſecans peripheriam in O. Centro A deſcribe per B alium circulum BS, & ex O duc OC perpendicularem ad AB, quæ occurrat circulo

BS

BS in C. Duc CA occurrentem circulo OQ in I. Ex B ad I ducta recta tanget circulum OQ.

Quia latera BA, IA æquantur lateribus CA, OA, anguluſque A communis eſt in trigonis
a Per 4. 1.2. IAB, OAC, etiam *a* anguli AOC, AIB æquales ſunt. Sed *b* AOC rectus eſt. Ergo etiam re-
b Per conſt. ctus eſt AIB. Ergo BI *c* tangit in I.
c Per 16. 1.3.

Scholium.

Fig. 27. *E*X 31. *ſequi pulchre ex dato puncto* [*O*] *ducitur tangens circulum datum* [*BQ.*]

Centrum A, & datum punctum O jungens recta biſecetur in P. Tum centro P per A, & O deſcribe circulum occurrentem dato in B: recta OB tanget.

Nam juncta AB angulus ABO in ſemicirculo rectus eſt per 31. *ergo per* 16. *OB tangit circulum BQ.*

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 28. *S*I *circulum tangat recta linea* [*CL,*] *quæ ex centro* [*A*] *ad contactum* [*B*] *ducitur, tangenti perpendicularis eſt.*

Si negas, ſit ex A centro perpendicularis alia
a Per 1. par. p. 16. 1.3. quædam recta AF: *a* ſecabit ea circulum in O. Quia ergo angulus AFB rectus ponitur, erit *b* ABF acu-
b Per corol. 5. p. 32. 1.1. tus. Ergo AB, (hoc eſt AO) major *c* quam AF, pars toto.
c Per 19. 1. 1.

PROPOSITIO XIX.

Fig. 29. *S*I *recta* [*BC*] *circulum tangat, & ex contactu* [*A*] *tangenti perpendicularis excitetur* [*AI*], *erit in ea centrum.*

Si negas, ſit centrum extra AI in Z, & ab eo ad

ad contactum ducatur ZA, erit *d* angulus ZAC rectus, ac proinde par angulo IAC per hyp. recto, hoc eſt pars toti. *d Per præc.*

PROPOSITIO XX.

Angulus ad centrum (BAC) duplus eſt anguli (BFC) ad peripheriam, cum idem arcus (BC) eſt baſis angulorum. Fig. 30. 31. 32.

Triplex eſt caſus. In primo latera BA, BF coincidunt. Tum vero, quia AF, AC ex centro ductæ æquantur, erunt in triangulo Z anguli F, & C *a* æquales. Sed BAC *b* æqualis eſt duobus F, & C. Ergo BAC duplus eſt unius F. Fig. 30. *a Per 5. l. 1.* *b Per 32. l. 1.*

In caſu ſecundo, BA, CA cadunt intra BF, CF. Tum vero ducta FAX, per caſum primum XAB eſt duplus XFB, & XAC duplus XFC. Ergo totus BAC duplus eſt totius BFC. Fig. 31.

In tertio caſu, BF, ſecat AC, & anguli BAC, BFC ſunt extra invicem. Ducatur FAL; per caſum 1. totus LAC duplus eſt totius LFC, & ablatus LAB duplus eſt ablati LFB. Ergo & reliquus BAC duplus eſt reliqui BFC. Quod erat demonſtrandum. Fig. 32.

PROPOSITIO XXI.

Anguli (BQC, BFC,) qui in circulo inſiſtunt eidem arcui (BOC) ſive qui in eodem ſegmento (BQFC) exiſtunt, inter ſe omnes ſunt æquales. Fig. 33.

Sit primo ſegmentum BQFC majus ſemicirculo.

Ex centro A duc AB, AC. Per præced. angulus BAC ad centrum duplus eſt ſingulorum BQC, BFC. Ergo omnes BQC, BFC ſunt *a* æquales. Quod erat demonſtrandum.

a Per axio. 6. l. 1.

Fig. 34. Sit deinde ſegmentum BQFC æquale, aut minus ſemicirculo. In triangulis BQI, CFI, quia anguli ad verticem I oppoſiti *b* æquales ſunt, etiam ſumma reliquorum Q, & R ſummæ reliquorum F, & O *c* æqualis erit. Quare ſi ab his æqualibus ſummis auferantur anguli R, & O, qui per primam partem æquales ſunt, utpote eidem arcui QF inſiſtentes, qui remanent Q, F æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per 15. l. 1.
c Per coſol. 10 p. 32. l. 1.

PROPOSITIO XXII.

Fig 35. *Quadrilateri circulo inſcripti (ABCF) oppoſiti anguli duos rectos conficiunt.*

Ducantur BF, CA. Angulus ABC cum duobus O, & X facit *a* duos rectos. ſed O eſt *b* æqualis I, quia inſiſtunt eidem arcui BC; & X *c* eſt æqualis Z, quia inſiſtunt eidem arcui AB. Ergo ABC cum duobus etiam I, Z, hoc eſt cum toto oppoſito angulo AFC facit duos rectos. Quod erat demonſtrandum.

a Per 32. l. 1.
b Per 21. l. 3.
c Per eand.

PROPOSITIO XXIII. & XXIV.

Non ſunt neceſſariæ, & agitur de ſegmentis ſimilibus, quæ non poſſunt ſine proportionibus recte definiri.

PROPOSITIO XXV.

D*Atum arcum (ABC) perficere.* Fig. 36.

Subtendantur utcunque duæ rectæ AB, CB, quas biſeca in I, & L. Ex I, & L duc perpendiculares ſibi occurrentes in puncto O. Hoc erit centrum circuli, cujus portio eſt arcus ABC.

Nam *a* centrum eſt & in recta IX, & in recta LZ. Ergo in communi ipſis puncto O. *a* Per corol. p. 1. l. 3.

Praxis. Centro B ſumpto in arcu deſcribe circulum, eodemque intervallo, aliis in arcu centris, deſcribe duos alios circulos, quorum ſinguli priorem biſſecent. Per interſectiones ducta recta ſibi mutuo occurrentes in O dabunt centrum. Fig. 36.

PROPOSITIO XXVI.

& XXVII

I*N circulis æqualibus rectæ æquales (CE, FI) ſubtendunt arcus æquales; & ſi arcus ſunt æquales, etiam ſubtenſæ æquales erunt.* Fig. 37.

1 Pars. Ad centra A, & B ducantur CA, EA, FB, IB. Quia triangula CAE, FBI ſibi mutuo æquilatera ſunt, etiam erunt ſibi mutuo *c* æquiangula. Ergo cum circuli ſibi mutuo imponentur, triangulum FBI congruere poterit triangulo CAE, ac proinde centrum B incidet in centrum A, & puncta F, I in puncta C, E. Cum igitur circuli ſint æquales, etiam arcus FLI neceſſario congruet arcui CQE, & arcus FOI arcui *c* Per 8. l. 1.

CSE, ac proinde æquales b erunt etiam ipſi.

b Per axiom.7. l. 1. Pars 2. Quoniam circulorum æqualium arcus FLI, CQE ponuntur æquales, ſibi mutuo impoſiti congruent, punctaque F, I incident in puncta C, E. Ergo & ſubtenſa F I congruet ſubtenſæ CE. Ergo FI, CE d æquales ſunt.

d Per axio.7.l.1.

PROPOSITIO XXVIII. & XXIX.

Fig. 38. *SI in circulis æqualibus anguli ſive ad centra (BAC, FLI,) ſive ad ambitum (BOC, FSI) ſint æquales, etiam arcus (BXC, FZI) quibus inſiſtunt, ſunt æquales: & ſi arcus ſunt æquales, etiam anguli æquales erunt.*

Pars 1. Quoniam latera AB, AC æquantur LF, LI; (ſunt enim æqualium circulorum ſemidiametri) & anguli A, L ponuntur æquales, erunt baſes a BC, FI æquales. Ergo arcus BXC, FZI etiam b æquales ſunt.

a Per 4. l. 1.
b Per præc.

Ponantur jam anguli BOC, FSI ad ambitum æquales. Quia igitur c horum dupli ſunt BAC, FLI, etiam illi æquales erunt, ac proinde, ut jam oſtenſum, etiam arcus BXC, FZI ſunt æquales.

c Per 20. l.3.

Pars 2. Ex æqualitate arcuum BXC, FZI habetur per 27. æqualitas ſubtenſarum BC, FI. Ergo, quia etiam BA, AC æquantur ipſis FL, LI, erunt e anguli A, & L ad centrum æquales: & quia i anguli O, & S horum dimidii ſunt, erunt etiam ipſi æquales.

e Per 8. l. 1.
i Per 20. l. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXX.

D*Atum arcum (ABC) biſecare.* Fig. 39.

Duc AC, quam biſeca in O. Ex O perpendicularem duc OB occurrentem arcui in B. Dico factum.

Jungantur enim AB, CB. Latera AO, OB per conſtr. æquantur lateribus CO, OB, & anguli ad O ſunt æquales, quia recti. Ergo baſes AB, BC *a* æquales. Ergo etiam *b* æquantur arcus AB, CB. *a* Per 4. 1. 1. *b* Per 26. 1. 3.

Praxis. Centris A, & C deſcribe pari intervallo arcus ſe ſecantes in punctis F, & I, per qua ducta recta arcum ABC biſecabit. Fig. 39.

PROPOSITIO XXXI.

A*Ngulus (BCF) in ſemicirculo rectus eſt: in ſegmento majore minor recto: in ſegmento minore major recto.* Fig. 40. & 41.

1 Pars. Ex centro A duc AC. Quia æquales ſunt AB, AC, anguli O, B *a* æquales erunt. Ob eandem cauſam æquales erunt I, F. Ergo totus BCF utrique B, & F æqualis eſt. Cum igitur *b* tres ſimul conficiant duos rectos, ſemiſſis trium, angulus BCF, unus rectus eſt. *a* Per 5. 1. 1. *b* Per corol. 7. p. 32. l. 1.

2 Pars. Sit ſegmentum LOBF ſemicirculo LOB majus, in eoque FOL angulus, & ducatur OB. Angulus FOL minor eſt angulo BOL, qui per 1. partem rectus eſt. Ergo &c. Fig. 41.

3. Pars. Eſto ſegmentum LOX ſemicirculo Fig. 41.

LOB minus, in eoque angulus XOL erit hic majus, quam BOL, qui rectus eſt. Ergo &c.

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 42. & 43. *SI recta (CF) circulum tangat, & alia ex contactu ducta (AB) eundem ſecet, erit angulus a tangente, & ſecante factus par angulo, qui fit in ſegmento alterno.*

Nimirum angulus CAB erit par angulo L, qui fit in ſegmento ALQB; & angulus FAB par angulo O, qui fit in ſegmento AOB.

Fig. 42. Tranſeat primo ſecans AB per centrum. Per 18. CAB rectus eſt. Et per 31. rectus eſt L. Ergo CAB, & L æquales ſunt.

Fig. 43. Tranſeat deinde ſecans AB non per centrum. Ducatur igitur per centrum recta AQ, & jungatur BQ. Quia ABQ in ſemicirculo rectus eſt, faciet BQA cum BAQ *a* rectum unum. Sed etiam CAQ rectus *b* eſt. Ergo BQA cum BAQ æquatur CAQ. Ablato igitur communi BAQ erit BQA (hoc *c* eſt L) æqualis CAB. Quod erat primum.

a Per 32. l. 1. *b* Per 18. l. 3. *c* Per 21. l. 3.

Deinde, *d* FAB, CAB faciunt duos rectos; & in quadrilatero BOAL *e* oppoſiti L, & O etiam faciunt duos rectos. Ergo duo FAB, CAB æquantur duobus ſimul O, & L. Ablatis ergo hinc quidem CAB, inde L, quos jam oſtendi æquales, erunt æquales reliqui FAB, & O. Quod erat alterum.

d Per 13. l. 1. *e* Per 22. l. 3.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Super data recta (BC) ſegmentum circuli conſtruere capiens angulum dato parem. Fig. 44.

Si detur angulus acutus ABF, ex B duc BL perpendicularem ad AB, & ad terminum C datæ rectæ BC fac angulo CBL parem *a* BCI, cujus latus ſecabit BL in I. Centro I per B deſcribe circulum, hic tranſibit per C (quia ob æqualitatem angulorum ad C, & B etiam latera CI, BI *b* æqualia ſunt,) capietque ſegmentum BQC angulum parem dato ABF.

Nam, quia AB diametro BL perpendicularis eſt, AB tanget *d* circulum, quem ſecat BC. Ergo *e* angulus in ſegmento BQC æquatur angulo ABF.

Quod ſi detur angulus obtuſus RBC; eadem conſtrue, eritque ſegmentum COB quæſitum.

a Per 23. l. 1.
b Per 6. l. 1.
d Per 18. l. 3.
e Per præc.

PROPOSITIO XXXIV.

A Dato circulo ſegmentum auferre capiens angulum dato parem. Fig. 45.

Ad circuli diametrum FA duc perpendicularem BAL; ducatur item AC, *f* quæ faciat angulum BAC parem dato. Hæc auferet ſegmentum AQC capiens angulum parem dato, uti patet ex 32.

f Per 23. l. 1.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 46. 47. 48. *SI in circulo duæ rectæ (CL, BF) ſe ſecuerint, rectangulum (COL) ſub ſegmentis unius æquale eſt rectangulo (BOF) ſub ſegmentis alterius comprehenſo.*

Fig. 46. Si ſe interſecant in centro A, res patet.

Si una CL tranſit per centrum A, & reliquam BF ſecat bifariam, ſecabit quoque *a* perpendiculariter, ac proinde quad. FO eſt rectangulum FOB. Ducatur AF. Quoniam CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

a Per 3. l. 3.

b Per 5. l. 2. (rect. COL Æ. *b* quad. AL: hoc eſt
(quad. AO

c Per 47. l. 1. quad. AF: hoc eſt *c*
quad. AO)
quad. FO)

Dempto igitur communi quadrato AO erit rect.

COL Æ. quad. FO: hoc eſt
rect. FOB.

Fig 47. Si una CL per centrum tranſit, & reliquam BF ſecat inæqualiter in O; ex centro A ducta recta ſecet ipſam BF in R bifariam. Igitur angulus ARB *d* rectus erit. Jam, quia CL biſecta eſt in A, & aliter in O, erit

d Per 3. l. 3.

e Per 5. l. 2. (rect. COL Æ. *e* quad. AL: hoc eſt
(cum quad. AO

f Per 47. l. 1. quad. AB: hoc eſt *f*
quad. AR)
quad. BR)

Sed

Sed quadratum A O æquatur *g* quadratis OR, AR. Ergo *g* Per cand.

(rectang. COL Æ. quad. AR)
(quad. OR quad. BR)
(quad. AR

Dempto igitur communi quadr. AR remanent
(rect. COL Æ quad. BR
(quad. OR

Atqui etiam quadratum BR æquatur rectangulo *i* FOB cum quadrato OR, quia FB ſecta eſt bifariam in R, & aliter in O. Ergo *i* Per 5. l. 2.

(rect. COL Æ. rect. FOB)
(quad. OR quad. OR)

Dempto igitur communi quadrato OR, erit rect. COL. Æ. rect. FOB.

Quod ſi neutra rectarum CL, FB per centrum tranſeat, per communem earum ſectionem O per centrum A ducatur recta XZ. Per modo demonſtrata tam rect. COL, quam rect. FOB æquantur rectangulo ZOX. Ergo etiam COL, FOB æqualia ſunt *a* inter ſe. Fig. 48. *a* Axi. 1. l. 1.

PROPOSITIO XXXVI.

SI a puncto (B) extra circulum dato ducantur duæ rectæ, una tangens (BF,) altera ſecans (BC,) erit rectangulum (CBO) ſub tota ſecante (CB,) & parte (BO) inter punctum, & circulum interjecta comprehenſum æquale quadrato tangentis (BF.) Fig. 49. 50. 51.

Si ſecans BC tranſit per centrum A, junge AF, faciet hæc *a* cum FB angulum rectum. Quoniam Fig. 49. *a* Per 18. l. 3.

CO

b Per 6. l. 2. c Per 47. l. 1. CO biſecta eſt in A, eique adjecta OB, erit

(rect. CBO *b* Æ. quad. AB *c*
(quad. AO. hoc eſt.
quad. BF)
quad. AF)

Ablatis ergo quadratis AO, AF æqualibus, remanet

rect. CBO Æ. quad. BF.

Fig. 50. & 51. Quod ſi CB non tranſit per centrum A, ducantur AB, AF, AO; & AL ex centro ducta d Per 3. l. 3. biſecet OC in L. Ergo angulus ALO *d* rectus e Per 18. l. 3. erit. Item AFB *e* erit rectus. Quoniam vero CO biſecta eſt in L, eique adjecta eſt OB, erit

f Per 6. l. 2. (rect. CBO. Æ. *f* quad. LB.
(quad. LO)

Addatur utrinque quadratum AL, erit

(rect. CBO Æ. quad. LB)
(quad. LO quad. AL)
(quad. AL

g Per 47. l. 1. Sed quadrata LO, AL æquantur quadrato *g* i Per eand. AO, ſeu AF; & quadrata LB, AL *i* æquantur quadrato AB. Ergo

(rect. CBO Æ. quad. AB
h Per eand. (quad. AF hoc eſt *h*
quad. BF)
quad. AF)

Ablato igitur communi quadrato AF, remanet rect. CBO Æ. quad. BF.

Corollaria.

Fig. 52. 1 SI ab eodem extra circulum puncto B, quotvis ducantur ſecantes BC, omnia rectangula

gula

gula C B O inter ſe æqualia ſunt. Singula enim æquantur quadrato tangentis BF.

2 Quæ ex eodem puncto circulum tangunt BF, BQ æquales ſunt; earum quippe quadrata æquantur ſingula eidem rectangulo CBO.

PROPOSITIO XXXVII.

SI rectangulum ſub CB, & OB ſit æquale quadrato BF, hæc circulum tanget in F. Fig. 32.

Ex B ducatur tangens BQ, & ex centro ductis ad Q, & F rectis EQ, EF jungantur B, E. Quoniam rectangulo C B O æquantur quadratum BF per hyp., & quadratum B Q per 36, hæc inter ſe æqualia ſunt, adeoque & rectæ BQ, BF æquales. Igitur triangula FEB, QEB ſibi mutuo ſunt æquilatera. Ergo *b* anguli Q, F æquales erunt. Sed Q *c* rectus eſt. Ergo etiam F rectus eſt. Ergo BF *d* tangit.

b Per 8. l. 1.
c Per 18. l. 3.
d Per 16. l. 3.

ELE-

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER QUARTUS.

HIc liber totus Problematicus eſt. Docet, quo artificio figuræ præſertim ordinatæ circulo inſcribantur, & circumſcribantur. Ampliſſimus eſt illius uſus in munitionibus extruendis, & ex illo quaſi fontes eximiæ illæ ſinuum, tangentium, & ſecantium tabulæ ingenti bono Matheſeos fluxere.

DEFINITIONES.

1 FIgura rectilinea circulo inſcripta eſt, vel circulus figuræ circumſcriptus eſt, cum ſingulorum angulorum vertices in circumferentia exiſtunt.

2 Figura rectilinea circulo circumſcripta eſt, vel circulus figuræ inſcriptus eſt, cum ſingula latera circulum tangunt.

3 Figura ordinata, ſeu regularis eſt, quæ æquilatera, & æquiangula eſt.

PROPOSITIO PRIMA.

Fig. 1. I.4. *CIrculi [BD] rectam datam [A] diametro non majorem inſcribere.*

Accipe in peripheria quodvis punctum B. Centro B intervallo datæ A deſcribe arcum circulo occur-

occurrentem in C. Duc rectam BC: Dico factum.

PROPOSITIO II.

Circulo triangulum inſcribere dato (X) æquiangulum. Fig. 2.

Circulum tangat EF in D. Fiat angulus EDG par *a* angulo C, & FDH par B, junganturque G, H. Dico factum. Nam angulus H æquatur *b* angulo EDG, hoc eſt *c* angulo C; & G æquatur *d* FDH, hoc eſt *e* ipſi B. Ergo etiam GDH *f* æquatur A. Factum eſt igitur, quod petebatur.

a Per 23. 1. 1. *b* Per 32. 1. 3. *c* Per conſt. *d* Per 32. 1. 3. *e* Per conſt. *f* Per corol. 9. p. 32. l. 1.

PROPOSITIO III.

Circulo circumſcribere triangulum æquiangulum dato ILK. Fig. 3.

Latus IK utrinque producatur, ut fiant externi anguli O, & N. Fac in centro A per 23. lib. 1. angulos GAB, BAF pares angulis O, N. Deinde in punctis G, B, F circulum tangant tres rectæ coeuntes in C, E, D. Triangulum CDE eſt circulo circumſcriptum, & æquiangulum dato ILK.

In quadrilatero CGAB anguli G, & B ſunt duo *a* recti. Ergo reliqui GAB, & C conficiunt ſimul etiam duos *b* rectos, ac proinde æquantur duobus ſimul O, I. Ablatis igitur GAB, & O æqualibus per conſtr. remanent æquales C, & I. Eodem modo oſtenditur E æqualis eſſe K. Ergo D, & L *c* etiam æquales erunt. Factum eſt igitur, quod petebatur.

a Per 16. l. 3. *b* Per theor. 1. ſchol. poſt 32. l. 1. *c* Per corol. 9. p. 32. l. 1.

Quod autem tangentes concurrant, ſic oſtenditur.

e Per 13. l. 1. tur. Anguli O, I, & K, N ſunt æquales *e* 4 rectis. I, K ſunt minores duobus *f* rectis. Ergo
f Per 32. l. 1. O, N (hoc eſt per conſtruct. GAB, & BAF) ſunt majores duobus rectis. Ergo GAF eſt minor
g Per corol. 3. p. 13. l. 1. duobus *g* rectis. Ergo recta GF cadit inter A, & D. Ergo cum AGD, AFD ſint recti, erunt DGF, DFG duobus rectis minores. Ergo *i* C
i Per theor. poſt 31. l. 1. GD, EFD concurrunt verſus D. Simili ratione demonſtrabis concurrere reliqua.

PROPOSITIO IV.

T*Riangulo circulum inſcribere.*

Fig. 3. Duos angulos C, & E biſeca rectis CA, EA coeuntibus in A. Ex A duc perpendiculares AB, AG, AF. Circulus centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per G, & F, tangetque tria latera trianguli.

In triangulis enim CAG, & CAB, quia anguli AGC, ABC; itemque GCA, BCA per conſtr. æquantur, & latus quoque AC eſt com-
a Per 26. l. 1. mune, etiam AG, AB *a* æqualia erunt. Pari modo oſtendam, paria eſſe AB, AF. Circulus ergo deſcriptus centro A tranſit per B, G, F; & quia
b Per 16. l. 3. anguli ad B, G, F ſunt recti, tangit *b* omnia trianguli latera. Fecimus ergo, quod petebatur.

PROPOSITIO V.

Fig. 4. T*Riangulo circulum circumſcribere: ſive per tria data puncta* [*B, C, D*] *non ad unam rectam poſita circulum deſcribere.*

Puncta data B, C, D binis rectis BC, CD con-

connecte, quas biſeca perpendicularibus OA, EA concurrentibus in A. Hoc erit centrum circuli per B, C, D tranſeuntis.

Ductæ intelligantur rectæ AC, AD, AB. Per conſtr. latera DO, AO æquantur lateribus OC, OA; & anguli ad O ſunt recti. Ergo AD *a* æquatur AC. Eodem modo AB æquatur AC. Ergo etiam AD, AB *b* æquales. Ergo circulus centro A deſcriptus per B tranſibit etiam per C, & D. Quod petebatur.

[a] Per 4. l. 1.

[b] Per axiom. 1. l. 1.

Ad praxim tantum opus eſt, centris B, C, D deſcribere tres æquales circulos ſe mutuo interſecantes, & per interſectiones ducere rectas, hæ ſibi occurrentes dabunt centrum quæſitum.

PROPOSITIO VI. & VII.

Circulo quadratum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 5.

Ducantur diametri BD, CE ſe mutuo ſecantes perpendiculariter: rectæ, quæ harum terminos jungunt, circulo quadratum inſcribunt.

Demonſtratio patet ex 4. lib. 1. & ex 31. lib. 3. Ducantur deinde quatuor tangentes circulum in B, C, D, E concurrentes in I, F, G, H. Figura IFGH quadratum eſt circulo circumſcriptum.

Demonſtratio patet ex 18. lib. 3. ex coroll. 2. pr. 36. lib. 3. ex 28. & 34. lib. 1.

Scholium.

Quadratum circumſcriptum circulo duplum eſt inſcripti. Nam, quia angulus BCD in ſemicirculo rectus d *eſt, erit quadratum ex DB [hoc eſt quadra-* Fig. 5.

[d] Per 31. l. 3.

a Per 47. l. 1. *dratum FI*] *æquale quadratis* e *DC*, *BC*, *proinde duplum quadrati DC*, *hoc eſt quadrati CDEB*.

PROPOSITIO VIII. & IX.

Fig. 6. **Q***Uadrato* [*BEFC*] *circulum inſcribere*, *&* *circumſcribere*.

Ducantur diametri in quadrato ſe ſecantes in A. Centro A per B deſcriptus circulus tranſibit etiam per E, F, C.

Deinde ex A duc AD perpendicularem ad CB. Centro A per D deſcriptus circulus tanget omnia quadrati latera.

Pars 1. Quia ex hyp. CB, EB latera ſunt æqualia; erunt anguli BCE, BEC *a* æquales. Angulus autem CBE rectus eſt per hyp. Ergo BCE, BEC *b* ſunt ſemirecti. Eodem modo oſtendam CBF, & reliquos eſſe ſemirectos, adeoque æquales inter ſe. Ergo in triangulo BAC, cum duo ſint æquales anguli CBA, & BCA, erunt AB, & AC *c* æquales. Eadem ratione AB, AE, AF æquales erunt. Circulus igitur centro A per B deſcriptus tranſibit etiam per E, F, C.

a Per 5. l. 1.
b Per corol. 11. poſt 32. l. 1.
c Per 6. l. 1.

Pars 2. Ex A ſint perpendiculares inſuper AG, AH, AI. Quoniam in triangulis GBA, & DBA anguli ad D, & G, itemque ad B inter ſe æquales ſunt, latuſque AB commune; latera *e* AD, AG æqualia erunt. Eadem ratione æqualia ſunt AG, AH, AI. Circulus ergo centro A per D tranſiens tranſibit etiam per G, H, I, tangetque latera *f* omnia quadrati, quia anguli ad D, G, H, I ſunt recti. Fecimus ergo, quod petebatur.

e Per 26. l. 1.
f Per 16. l. 3.

PRO-

PROPOSITIO X.

Triangulum iſoſceles conſtruere (BAC,) in quo angulus ad baſim (ABC, vel ACB) ſit duplus anguli ad Verticem (A.) Fig. 7.

Sumatur quævis recta AB, quam ita ſeca *a* in D, ut rectangulum ABD ſit æquale quadrato DA. Tum centro A per B deſcribe circulum, cui inſcribe BC *b* æqualem DA, & junge AC. Erit triangulum BAC quæſitum.

a Per 11. l. 2.
b Per 1. l. 4.

Ducatur enim recta DC, & per C, D, A deſcribe *c* circulum. Quoniam rectangulum ABD æquatur quadrato AD, hoc eſt BC, liquet BC tangere *d* circulum DO, quem ſecat CD. Ergo angulus BCD æquatur *e* angulo A in ſegmento alterno; additoque communi DCA, erit BCA æqualis duobus A, & DCA. Sed quia latera AB, AC æquantur, ABC æqualis *f* eſt BCA. Ergo etiam ABC æquatur duobus A, & DCA. Sed etiam externus BDC, *g* æquatur duobus internis A, & DCA. Ergo ABC, & BDC æquales ſunt. Recta igitur DC æquatur *h* BC, hoc eſt per conſt. DA. Ergo anguli, A, & DCA *i* æquantur. Quare angulus ABC, qui duobus oſtenſus eſt æqualis, duplus erit unius A. Factum igitur eſt, quod petebatur.

c Per 5. l. 4.
d Per 37. l. 3.
e Per 32. l. 3.
f Per 5. l. 1.
g Per 32. l. 1.
h Per 6. l. 1.
i Per 5. l. 1.

Corollarium.

Anguli ad baſim ſinguli B, & C in triangulo iſoſcelio jam conſtructo ſunt duæ quintæ duorum rectorum, ſeu quatuor quintæ unius recti, & reliquus A eſt una quinta duorum rectorum,

G ſeu

ſeu duæ quintæ unius. Patet ex propoſitione hac, & ex 32. lib. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 8. & 7. *Circulo pentagonum ordinatum inſcribere.*

a Per præc. b Per 2. l. 4. Deſcribatur *a* triangulum BAC habens angulum ad baſim duplum anguli ad verticem. Huic æquiangulum CAD *c* inſcribe circulo. Angulos ad baſim ACD, & ADC ſeca bifariam rectis CE, DB occurrentibus circulo in E, & B. Puncta A, B, C, D, E rectis lineis connexa dabunt pentagonum ordinatum circulo inſcriptum.

b Per 28. l. 3. c Per 28. l. 3. d Per 29. l. 3. Nam ex conſtructione liquet quinque angulos I, N, Q, S, O æquales eſſe. Quare etiam arcus iis ſubtenſi AE, ED, DC, CB, BA *b* ſunt æquales. Itaque rectæ ſubtenſæ arcubus etiam æquales *c* erunt. Pentagonum igitur æquilaterum eſt. Eſt vero etiam æquiangulum, *d* quia ejus anguli BAE, AED &c. inſiſtunt arcubus æqualibus BCDE, ABCD, &c. Factum eſt igitur, quod petebatur.

Corollarium.

Fig. 8. Angulus pentagoni ordinati facit ſex quintas unius recti, ſeu tres quintas duorum. Nam tres anguli ad A, cum ſint æquales, utpote æqualibus arcubus BC, CD, DE inſiſtentes, & medius per coroll. præced. ſit duæ quintæ unius recti, tres ſimul, hoc eſt ipſe pentagoni angulus, conficiet ſex quintas unius recti.

Scho-

Digitized by Google

Scholium.

INgenioſa eſt Euclidæa pentagoni inſcriptio, ſed multo expeditior illa Ptolomæi, quam l. 1. Almageſti tradit, & eſt ejuſmodi.

Ducantur diametri ED, BF ſe mutuo perpendiculariter interſecantes in A. Radium AD biſeca in C. Centro C per B deſcribe arcum diametro ED occurrentem in G. Recta GB eſt latus pentagoni, & AG decagoni. Fig. 12.

Demonſtratio hic dari nequit; pendet enim à l. 13. Eucl. Eam vide apud Clavium in ſcholio poſt p. 10. l. 13.

Problema.

SUper data recta (AB) pentagonum ordinatum ita conſtrues. Seca e AB ſic, ut rectangulum ABC ſit æquale quadrato AC. Ex AB utrinque producta aufer AD, BE æquales majori ſegmento AC. Centris A, & D intervallo AB deſcribe arcus duos ſe ſecantes in F. Item centris B, & E eodem intervallo ſe ſecantes in G. Rurſum centris F, & G intervallo itidem AB alios ſe ſecantes in I. A, F, I, G, B rectis lineis juncta dabunt pentagonum ordinatum (hoc eſt æquilaterum, & æquiangulum) ſuper data A B. Fig. 9. e Per 11. l. 2.

Æquilaterum eſſe patet ex conſtructione; æquiangulum eſſe, ſic demonſtrabitur. Ducatur DF. Patet ex conſtructione, triangulum AFD eſſe iſoſceles. Et baſis AD eſt majus ſegmentum lateris DF extrema, & media ratione ſecti (eſt enim DF æqualis AB, & AD æqualis AC.) Ergo Angulus o DAF eſt duæ quintæ duorum rectorum. Ergo reliquus FAB p tres quintæ duorum rectorum, ſive ſex quintæ unius recti; ac proinde eſt q angulus pentagoni ordinati. Eodem modo oſten- o Per Corol. p. 10. l. 4. p Per 13. l. 1. q Per corol. p. 11. l. 4.

oſtenditur angulum GBA eſſe ſex quintas unius recti, ac proinde parem FAB. Unde neceſſe jam eſt, reliquos F, G, I his æquales eſſe, ut patet ex 8. lib. 1. ſi concipiatur ſubtendi recta FG.

PROPOSITIO XII.

Fig. 10. *Circulo pentagonum ordinatum circumſcribere.*

Inſcribatur pentagonum ordinatum per præc. GHIKM, ducanturque tangentes in punctis, G, H, I, K, M, quæ concurrant in B, C, D, E, F, dico factum.

Ex centro duc rectas AG, AB, AH, AC, AI. Quoniam BG, BH ex uno puncto B tangunt circulum, æquales *a* erunt. Trigona igitur GAB, HAB ſibi mutuo æquilatera ſunt. Æquantur ergo *b* anguli O, P, item Q, S; ac proinde totus B duplus eſt ipſius P, & totus GAH duplus eſt S. Eadem de cauſa anguli C, & HAI dupli ſunt ipſorum T, & N. Sed GAH, & HAI æquales *c* ſunt, quia inſiſtunt arcubus æqualibus GH, HI per conſt. Ergo etiam eorum dimidii S, N æquales erunt. Quoniam igitur in triangulis BAH, CAH duo anguli S, N æquantur, itemque duo ad H *d* recti, latuſque AH eſt commune, etiam *e* BH, CH, itemque anguli P, T æquales erunt. Eodem modo oſtendam, rectas BG, FG eſſe æquales. Igitur CB, FB duplæ ſunt æqualium BG, BH, ac proinde æquales. Eodem modo oſtendam, reliqua latera pentagoni circumſcripti eſſe æqualia. Illud igitur æquilaterum erit. Eſt vero & æquiangulum, quia, cum jam oſtenſum ſit, angulos B, & C duplos eſſe æqualium P, & T,

a Per corol. 2. p. 36. l. 3.
b Per 8. l. 1.
c Per 28. l. 3.
d Per 18. l. 3.
e Per 26. l. 1.

& T, etiam ipſi æquales erunt: eodemque modo & reliqui. Ordinatum igitur pentagonum circulo circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

Eodem artificio circulo circumſcribitur ordinata figura quacunque, ſi prius illi ſimilis circulo inſcribatur.

PROPOSITIO XIII. & XIV.

Pentagono ordinato circulum inſcribere, & circumſcribere. Fig. 111

Duos pentagoni angulos B, C biſeca rectis BN, CS concurrentibus in A. Ex A duc perpendicularem AL.

Circulus centro A per L deſcriptus tanget omnia pentagoni latera; circulus vero deſcriptus centro A per B tranſibit etiam per C, D, E, F.

Pars 1. In trigonis DCA, BCA, quia latera DC, CA *a* lateribus BC, CA; itemque *b* anguli P, & O æquantur, etiam G, & I æquales *c* erunt. Sunt vero *a* etiam toti B, & D æquales. Quare cum *d* angulus G ſit dimidius anguli B, etiam I erit dimidius ipſius D. Igitur D quoque biſectus eſt recta DM. Ob eandem cauſam reliqui pentagoni anguli E, F ſunt biſecti; ac proinde omnes dimidii anguli inter ſe æquales erunt. Ducantur inſuper perpendiculares AM, AS, AN, AR. Quoniam igitur in trigonis LBA, MBA anguli G, & Q æquantur, & latus LB lateri MB *e* æquale eſt, latuſque BA commune, etiam *f* AL, AM æquales erunt. Pari modo oſtendam reliquas AM, AS, AN, AR inter ſe æquari. Circulus ergo centro A tranſiens per L tranſibit etiam per M, S, N, R; &, quia anguli ad L, M, S, N, R recti ſunt per

a Per hyp.
b Per conſt.
c Per 4. 1. 1.
d Per conſt.
e Per corol. 2. p. 36. l. 3.
f Per 4. l. 1.

f Per 16. l. 1. conſtr. tanget *g* quinque latera pentagoni. Quod erat primum.

Pars 2. In trigono CAB, quia anguli O, & G jam oſtenſi ſunt æquales, erunt latera AC, AB

h Per 6. l. 1. *h* æqualia: eademque ratione æquantur etiam AB, AF, AE, AD; ac proinde circulus centro A tranſiens per B, tranſibit etiam per C, D, E, F. Pentagono igitur circulum inſcripſimus, & circumſcripſimus. Quod erat faciendum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 13. *In dato circulo Hexagonum ordinatum deſcribere.*

Ducatur diameter FAB. Centro B per centrum A deſcribe circulum, qui datum ſecet in C, & D. Item centro F per A deſcribe circulum, qui ſecet datum in E, & G. Sex puncta B, C, E, F, G, D rectis lineis connexa dabunt quæſitum.

Ex centro A emittantur rectæ AC, AE, AG,

a Ex 1. l. 1. AD. Patet triangula H, I, M, L, *a* eſſe æquilatera; deinde quia anguli CAB, EAF ſinguli *b*

b Per coro. 12. p. 32. l. 1. efficiunt unam tertiam rectorum duorum, ac proinde ſimul duas tertias, patet *c* EAC etiam

c Per coroll. 1. p. 13. l. 1. eſſe unam tertiam duorum rectorum. Anguli igitur EAC, CAB æquales ſunt; ſunt autem & latera EA, AC æqualia lateribus BA, AC. Ergo

d Per 4. l. 1. *d* baſis EC baſi CB, hoc eſt (ut jam oſtenſum) radio AC æqualis eſt. Quare etiam N æquilaterum eſt. Eodem modo oſtenditur æquilaterum eſſe K. Quoniam igitur triangula omnia H, I, K, L, M, N æquilatera ſunt, patet, latera ſingula CB, BD, DG, GF, FE, EC æquari radio circuli AC, ſeu AB, ac proinde inter ſe. Hexagonum igitur

æquila-

æquilaterum eſt. Eſt vero & æquiangulum, cum ſinguli ejus anguli E, C, B, D, G, F conſtent duobus æquilateri trianguli angulis. Ergo Hexagonum, quod circulo inſcripſimus, eſt ordinatum.

Corollarium.

1 LAtus hexagoni circulo inſcripti æquale eſt radio.

2 Angulus hexagoni ordinati eſt quatuor tertiæ unius recti, conſtat enim ex duobus angulis trianguli æquilateri, quorum ſinguli conficiunt *d* duas tertias unius recti. *d* Per cor. 12. p. 32. l. 1.

3 Si ducatur inſuper diameter PS perpendicularis alteri FB, & intervallo radii PA centris P, & S ſectiones fiant in R, & Q, in O, & T; puncta P, L, R, F, O, G, S, D, T, B, Q, C rectis lineis connexa dabunt duodecangulum ordinatum una circini apertura circulo inſcriptum. Id quod magno eſt uſui in Gnomonica. Fig. 14.

4 Ex demonſtratis elicitur etiam deſcriptio facillima trianguli æquilateri in circulo. Ducta diametro FB centro B per A centrum deſcribe arcum CAD. Puncta C, F, D rectis juncta dant æquilaterum quæſitum. Fig. 14.

5 Æquilateri trianguli latus CXD a diametro BF ad ipſum perpendiculari quartam partem BX abſcindit. Nam anguli ACX, BCX æqualibus arcubus GD, DB inſiſtentes æquales *e* ſunt; & latera AC, CX æquantur lateribus BC CX. Ergo AX, BX *f* æquales ſunt. Ergo BX eſt quarta pars diametri BF. *e* Per 29. l. 3. *f* Per 4. l. 1.

Scholium.

Problema.

Fig. 13. r Per 1. l. 1. *HExagonum ordinatum ſuper data recta CB ita conſtrues. Fac* r *triangulum CAB æquilaterum ſupra datam CB. Centro A per B, & C deſcribe circulum. Is capiet hexagonum ſuper datam CB. Patet ex propoſ. & coroll.* 1.

Theorema.

Fig. 14. *QUadratum ex latere trianguli æquilateri triplum eſt quadrati ex ſemidiametro circuli, cui inſcriptum eſt, adeoque ad quadratum diametri eſt, ut* 3 *ad* 4.

Ducatur ſemidiameter AD. Quadratum FD æquatur quadratis s *FA, DA, & rectangulo FAX bis. Sed rectangul. FAX bis eſt par quadrato ſemidiametri FA, ſeu DA [nam quia AX, XB æquales* t *ſunt, rectangulum FAX bis æquatur duobus rectangulis, nempe ſub FA, AX, & ſub FA, XB; hoc eſt rectangulo* u *FAB; hoc eſt quadrato FA.] Ergo quadratum FD triplum eſt quadrati ex ſemidiametro.*

s Per 12. l. 1.

t Per coroll. 5. præced.

u Per 1. l. 2.

Quia autem quadratum totius diametri FB quadruplum x *eſt quadrati FA, patet quadratum FD eſſe ad quadratum diametri ut* 3 *ad* 4.

x Per 4. l. 2.

Hinc ſequitur latus æquilateri trianguli eſſe ad diametrum, ut radix quadrata ternarii eſt ad 2, *radicem nempe quadratam quaternarii, ac proinde eſſe lineas incommenſurabiles.*

PROPOSITIO XVI.

IN *circulo quindecagonum ordinatum deſcribere.* Fig. 15.
Circulo inſcribe *a* latus pentagoni AC, & trianguli *b* æquilateri latus AD. Arcum CD biſeca in E. CE eſt latus quindecagoni. *a* Per 11. l. 4. *b* Per corol. 4. p. 15. l. 4.

Nam ſi tota peripheria ſtatuatur eſſe 15, erit arcus AC 3, & arcus AD 5, ac proinde arcus CD 2, ideoque CE unum.

Corollarium.

HAc methodo innumeræ figuræ ordinatæ circulo inſcribentur. Nam ſi duarum ordinatarum latera AC, AD circulo ſint inſcripta, arcuum differentia CD continebit tot latera novæ figuræ ordinatæ, quot unitatibus differunt denominatores priorum. Denominator autem novæ figuræ habetur, ſi denominatores priorum inter ſe multiplicentur. Fig. 15.

Ut ſi AD ſit latus quadrati, & AC decagoni, Denominatorum differentia eſt 6. Igitur arcus CD continet 6. latera figuræ novæ. Ea vero eſt 40. laterum. Denominatores enim 4, & 10 inter ſe multiplicati faciunt 40.

Scholium.

NOndum reperta ars eſt, qua ſolo circino, & regula inſcribantur circulo figuræ ordinatæ laterum 7, 9, 11, 13, 17, *&c. Cum illa inſcriptio figurarum dependeat a diviſione circumferentiæ in partes datas, quæ etiamnum deſideratur. Licebit tamen, circuli circumferentia in* 360 *partes diviſa, mechanice figuras quaſcunque ordinatas circulo inſcribere hunc in modum.*

Pro-

Problema 1.

Fig. 15. *GRadus 360 [hoc eſt totam circumferentiam] divide per denominatorem polygoni inſcribendi [ex. gr. nonanguli]: quot unitatibus conſtat quotiens [40] tot graduum fac in centro angulum AGK. Erit AK latus figuræ quæſitæ [nonangulæ] circulo inſcribendæ.*

Problema 2.

Fig. 15. *AT ſuper data recta quamvis figuram ordinatam deſcribes præſidio tabellæ ſequentis; Angulus rectus eſt ad angulum figuræ.*

					differ.
In Pentagono	*ut*	5	*ad*	6	1
Hexagono	*ut*	3	*ad*	4 ...	1
Heptagono	*ut*	7	*ad*	10	3
Octogono	*ut*	2	*ad*	3	1
Nonagono	*ut*	9	*ad*	14	5
Decagono	*ut*	5	*ad*	8	3
Undecagono	*ut*	11	*ad*	18	7
Duodecagono	*ut*	3	*ad*	5	2

Fig. 15. *Oporteat igitur ſuper data recta XB heptagonum ordinatum deſcribere. Centro X deſcribe circulum, a quo abſcinde quadrantem BO. Vide in tabula quæ ſit proportio recti anguli ad angulum heptagoni, reperies, ut 7 ad 10, & differentia eſt 3. Quadrantem igitur partire in 7 arcus æquales, quorum adhuc tot ipſi adde ex O in N, quot unitates habet differentia. Per tria puncta BXN deſcribe a circulum, hic capiet heptagonum data recta XB.*

a Per 5. l. 4.

Tabella confecta eſt ope theorematis 2. in ſchol. poſt

poſt 32. *lib.* 1. *quo reperitur numerus rectorum angulorum, quos efficiunt anguli cujuſcunque rectilinei; qui numerus diviſus per denominatorem figuræ exhibet denominatorem proportionis anguli figuræ ad rectum.*

Quoniam vero de figuris ordinatis multa hactenus ſunt propoſita, finiat hunc librum Procli celebre Theorema.

Theorema.

TRes tantum figuræ ordinatæ, videlicet 6. *triangula æquilatera,* 4. *quadrata,* 3. *hexagona ſpatium replere poſſunt, hoc eſt unam continuam ſuperficiem conſtituere. Quod ſic demonſtratur. Ut aliqua figura ordinata ſæpius repetita poſſit replere ſpatium, requiritur, ut anguli plurium ejus ſpeciei figurarum circa unum punctum compoſiti poſſint conficere quatuor rectos; tot enim circa unum punctum poſſunt conſtitui, ut patet ex coroll.* 3. *pr.* 13. *lib.* 1. *ex. gr. ut triangula æquilatera poſſint replere ſpatium, requiritur, ut aliquot anguli talium triangulorum* N, M, L, K, I, H, *circa punctum* A *compoſiti efficiant quatuor rectos.* Fig. 13. *Atqui quatuor rectos efficiunt* 6. *anguli trianguli æquilateri* [*nam unus facit duas tertias* b *unius recti, ac proinde* 6. *faciunt* 12. *tertias unius recti, hoc eſt* 4. *rectos*]; *item* 4. *anguli quadrati, ut patet; item* 3. *anguli hexagoni* [*unus enim facit* 4. *tertias* c *unius recti, ac proinde* 3. *faciunt* 12. *tertias unius recti, hoc eſt rurſum* 4. *rectos.*] *Ergo &c.*

b Per corol. 12. p. 32. l. 1.

c Per corol. 12. p. 15. l. 4.

Quod autem id nulla alia figura poſſit, liquido conſtabit, ſi angulum ejus repertum, ut ſupra, quocunque numero multiplices; ſemper enim aut deficient a 4. *rectis, aut excedent.*

ELE-

ELEMENTORUM

GEOMETRIÆ

LIBER V.

QUanti momenti in Geometria ſit ſcientia proportionum, nemo eſt Mathematicus, qui ignoret. Ea traditur ab Euclide toto quinto, & ſexto libro. Sed quamvis illi, cæteriſque Elementorum conditoribus plurimum debeamus; in iis tamen, quæ de proportione tradiderunt, deſiderari aliquid videtur. Difficultas tota in definitione 5. *lib.* 5. *vertitur, ubi tradit Euclides, quid ſit quatuor magnitudines eſſe proportionales, ſive duas rationes eaſdem, ſimiles, æquales eſſe. Definit igitur duas rationes tum æquales dici, ſeu ſimiles, quando antecedentia quocunque numero æqualiter multiplicata, conſequentibus etiam quocunque numero æqualiter multiplicatis, ſemper vel ſimul æqualia ſunt, vel ſimul majora, vel ſimul minora.* a *Atque ex ea definitione omnes deinde* 5., & 6. *libri demonſtrationes mediate, vel immediate deducit. Hæc doctrina Euclidæa ſumma eſt, quæ multiplicem, ut dixi, difficultatem habet. Nam in primis certum eſt ea definitione non naturam æqualium rationum, ſed affectionem ſolummodo aliquam explicari. Deinde illa multiplicium proprietas adducitur, vel tanquam ſignum infallibile rationum æqualium, ut quandocunque ea demonſtrata fuerit de quibuſvis rationibus, inferre certo liceat, æquales eas eſſe; vel is ſenſus illius eſt, ut per magnitudines eandem*

a Per defini. declaratur.

Inf. poſt def. 6.

dem rationem habentes nihil aliud intelligi velit, quam earum multiplices modo jam dicto excedere, vel excedi. Si primum, demonſtrare debuerat, eam affectionem omnibus, & ſolis rationibus æqualibus ineſſe, ut ex ea rationum æqualitas certo poſſit inferri. Id vero minime vulgare theorema eſt, quod neque Euclides, neque alius poſt Euclidem ullus demonſtravit. Si ſecundum, ſecuri quidem erimus de veritate theorematum in ſenſu definitionis acceptorum; minime tamen ex vi demonſtrationum nobis conſtare poterit de abſoluta rationum æqualitate. Exemplum eſto prima ſexti. Certi erimus ex Euclidæa demonſtratione, rationem triangulorum ABC, & DEF æqualem eſſe rationi baſium AC, & DF, per rationum æqualitatem ſolum intelligendo dictam illam proprietatem multiplicium; non colligemus tamen rationes illas triangulorum baſium rationibus vere, & abſolute æquales eſſe, cum demonſtratum non ſit, affectionem illam multiplicium cum abſoluta, & vera rationum æqualitate neceſſario eſſe connexam. Quomodocunque igitur illa definitio accipiatur, librorum 5. ac 6. demonſtrationes vacillant, quamdiu demonſtratum non fuerit, veram rationum æqualitatem cum ea multiplicium proprietate ſemper eſſe connexam. Denique ut ſibi conſtarent omnia, tamen ille multiplicium labyrinthus mihi, aliiſque ſemper diſplicuit, & tyronibus plurimum ſemper faceſſivit negotii, quorum ita plerumque mentes intricat, ut exitum vix reperiant. Quare ut doctrinam proportionum, quæ quaſi medulla, atque anima Geometriæ, & univerſæ Matheſeos eſt, ab ea labe vindicemus, hæc tria præſtare conabimur.

Fig. 2. l. 6. tab. 6.

Primo oſtendam libri quinti theoremata, quæ ab Euclide per multiplices demonſtrantur, eo fere loco ha-

habenda eſſe, quo axiomata, ac proinde declaratione potius ſubinde aliqua, quam demonſtratione egere. Ita proportionum cognitio, quam ille circuitus multiplicium difficilem hactenus, & perobſcuram effecerat, plana, & expedita reddetur.

Secundo demonſtrabimus, quandocumque antecedentium qualibet æque multiplices conſequentium quibuslibet æquemultiplicibus vel pariter majores ſunt, vel pariter minores, vel pariter æquales, tum rationes eſſe vere æquales, ſeu ſimiles. Quo ſtabilito, omnes Euclidææ demonſtrationes, totaque illius de proportionibus doctrina ſubſiſtet, ut, qui noſtris probationibus contentus non ſit, ad Euclidæas, quamvis prolixas, jam tamen ſecuras, ac ſolidas ſe poſſit convertere. Aſſignabimus item, ac demonſtrabimus proportionum æqualium aliud indicium clariſſimum, ac primum, ex quo omnes quinti libri propoſitiones deducere poterit, qui voluerit.

Tertio. De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione tractatum ſubjungam penitioris Geometriæ ſtudioſis plane neceſſarium, ubi etiam demonſtrabimus axioma illud, ſeu potius theorema hactenus indemonſtratum, rationem extremorum ex rationibus quotlibet intermediorum componi.

Tyronibus ſatis erit definitiones, & primam partem perlegere.

PRI-

PRIMA PARS.

Proportionum elementa faciliori methodo proponuntur.

PROPOSITIONES.

1 PArs aliquota magnitudinis eſt, quæ aliquoties repetita magnitudinem metitur, ſive adæquat. Pars aliquanta, quæ non metitur.

Longitudo unius pedis eſt pars aliquota longitudinis 10 pedum, quia illam decies repetita metitur. Longitudo vero 4 pedum eſt pars aliquanta lineæ 10 pedum, quia aliquoties repetita, nempe bis illam non adæquat, repetita vero ter excedit.

2 Magnitudo magnitudinis multiplex eſt, cum minor metitur majorem, ac proinde ejus pars aliquota eſt, ſive cum major minorem aliquoties continet præciſe.

3 Ratio, ſive proportio eſt duarum ejuſdem generis magnitudinum mutua quædam ſecundum quantitatem habitudo.

Sunt igitur in omni proportione duo termini, quorum ille Antecedens dicitur, qui primo nominatur, ſive is, qui nominandi caſu effertur, alter Conſequens.

Cum antecedens, & conſequens ſunt æquales, proportio æqualitatis dicitur, cum inæquales, dicitur eſſe proportio inæqualitatis.

4 Ratio, ſeu proportio rationalis eſt, quæ exiſtit inter magnitudines commenſurabiles, & numeris exprimi poteſt, Proportio irrationalis eſt,

quæ

quæ exiſtit inter magnitudines incommenſurabiles, & nullis numeris explicari poteſt.

Porro commenſurabiles quantitates ſunt, quas aliqua communis menſura metitur; incommenſurabiles, quas nulla metitur menſura communis.

Fig. 1. l. 5. tab. 5. 5 Duæ rationes (A ad B, & C ad F) ſunt ſimiles, æquales, eædem, cum unius antecedens (A) æque, ſeu eodem modo (hoc eſt nec magis, nec minus) continet ſuum conſequens (B), quo alterius antecedens (C) continet ſuum conſequens (F.)

Fig. 2. Vel quando unius antecedens (A) eodem modo continetur in ſuo conſequente (B), quo (C) antecedens alterius in ſuo (D.)

Fig. 3. 6 Duæ rationes ſunt diſſimiles, ſive una ratio eſt major altera, quando unius antecedens (I) magis continet ſuum conſequens (L), quam alterius antecedens (O) contineat ſuum conſequens (Q); vel quando antecedens unius minus continetur in ſuo conſequente, quam antecedens alterum contineatur in conſequente ſuo.

Fig. 4.

Proportionum æqualitas, & inæqualitas explicatur.

Quid porro ſit unum antecedens æque, vel magis continere ſuum conſequens, quam antecedens alterum contineat ſuum, ſi proportiones ſint rationales, definiri, & explicari ulterius poteſt per numeros, ut ſi A ſit triplum B, & C triplum F, perſpicuum erit quid ſit, A æque, ſeu eodem modo continere B, quo C continet F: vel ſi I ſit triplum L, O vero duplum Q, conſtabit rurſum, quid ſit I magis continere L, quam O

Fig. 1. Fig. 3.

con-

contineat Q. At, ſi proportiones fuerint irrationales; ea res explicari ulterius nec poteſt, nec debet. Dentur magnitudines incommenſurabiles A, B, Fig. 5. *perſpicuum eſt, A non ſolum majus eſſe B, ſed etiam certo quodam modo eſſe majus, [A quippe aliter continet B, quam alia qualibet major, minorve, quam A:] neque tamen ulterius quæri, aut explicari debet, quis ſit certus ille modus, quo A continet B, quia per nullos numeros explicabilis eſt. Itaque quemadmodum datis binis incommenſurabilibus quantitatibus, non debet ulterius quæri, quid ſit unam certo modo continere alteram, ita neque, cum dantur quatuor proportionales incommenſurabiles, quæri debet ulterius, quid ſit C eodem modo continere D, quo A continet B. Sicuti enim modus, quo A continet B, ulterius eſt inexplicabilis, ita plane etiam identitas modi, quo A continet B, cum modo, quo C continet D, ulterius inexplicabilis eſt.*

Quod vero cuicunque proportioni irrationali A Fig. 5. *ad B dabiles ſint infinitæ aliæ proportiones irrationales æquales, majores, minores, diverſis terminis conſtantes, facile poterimus intelligere hunc in modum. Sumatur quæcunque quantitas C, & auferatur B ex A incommenſurabili ſecum quantitate, quoties poteſt, puta ter, & ſuperſit EF. Sit deinde O tertia pars ipſius C, ſit inſuper quæpiam X ipſi C incommenſurabilis, quæ major ſit, quam O. Quoniam igitur A continet B plus quam ter, C vero continet X minus quam ter (nam C continet præciſe ter O minorem quam X) erit ratio irrationalis C ad X minor ratione irrationali A ad B. Accipiatur jam Q quarta pars C, & quæpiam eſto Z ipſi C incommenſurabilis, quæ minor ſit, quam Q. Quoniam igitur A continet B minus, quam quater, C vero continet Z plus, quam quater (cum C præciſe quater contineat*

H *Q ma-*

Q majorem, quam Z,) erit ratio irrationalis C ad Z major ratione irrationali A ad B.

Jam vero, quia C ad aliquam X minorem rationem habet, quam A ad B, & rurſum, quia C ad aliquam Z majorem rationem habet, quam A ad B, manifeſtum eſt etiam C ad aliquam D mediam inter X, & Z eandem habere rationem, quam A ad B. Quod quidem perinde clarum eſt lumine naturali, atque iſtud: dabile eſt majus, quam P, & dabile eſt minus, quam P, ergo dabile eſt æquale aliquod ipſi P.

Quid in proportionum æqualium definitione Euclidæa deſideretur.

Fig.21. *QUod ad Euclidem attinet, is duas proportiones A ad B, C ad F æquales eſſe dicit, cum antecedentium quæcunque æque multiplices I, Q conſequentium quibuſcunque æque multiplicibus L, R, vel ſimul majores ſunt, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, hoc eſt, cum I ſuperat L, etiam Q ſemper ſuperat R; & cum I ſuperatur ab L, etiam Q ſemper ſuperatur ab R; & cum I eſt æqualis L, etiam Q ſemper eſt æqualis R. Ubi bene notandum eſt, Euclidem non aſſumere æque multiplicium exceſſus, defectuſque proportionales, ſeu ſimiles, ſic enim inepte idem per idem explicaſſet; ſed exceſſus, & defectus ſimpliciter. Nihilominus hic aliquid in ſummo Geometra deſiderari jam ſupra declaravimus. Nam vel cupit hiſce verbis rationes æquales definire, & ſic rei definitæ proprietatem pro definitione affert: evidens quippe eſt, hanc multiplicium affectionem ex rationum æqualitate profluere; vel adducit tanquam indicium primum, & infallibile rationum æqualium; & ſic demonſtrare debuerat,*

rat, eam cum rationum æqualitate ita ſemper eſſe connexam, ut hæc ex illa certo poſſit inferri. Quæ quidem connexio & perobſcura, & demonſtratu difficilis eſt; vel denique per rationum æqualitates nihil aliud intelligit, quam ſimultaneum illum exceſſum, defectumve multiplicium; & ſic toto quinto, ac ſexto libro, cum quatuor magnitudines proportionales eſſe demonſtrat, nihil ſciemus aliud, quam dictum exceſſum, & defectum illis competere, incerti plane utrum magnitudines, de quibus agitur, ſint vere proportionales.

Proportionum æqualium alind indicium primum, & infallibile aſſignatur.

Quod ſi rationum æqualium deſideretur indicium infallibile, & facile, & primum, nos tale aſſignabimus, demonſtrabimuſque theor. 5. & 6. par. 2., eſtque ejuſmodi. Fig. 26. ° Majoris inæqualitatis.

Rationes ° *æquales ſunt (AB, ad CF, GM ad NQ.) quando & conſequentes ipſa, & conſequentium ſimiles partes aliquotæ quæcunque in antecedentibus æquali ſemper numero continentur.*

Ut ſi una decima ipſius CF contineatur in AB ducenties, una quoque decima NQ contineatur ducenties in GM; & ſi una centeſima CF contineatur millies in AB, etiam una centeſima NQ contineatur millies in GM, & ſic deinceps in infinitum, erit AB ad CF, ut GM ad NQ.

Inæquales autem rationes ſunt, quando aut conſequentes ipſa, aut conſequentium aliquæ ſimiles

aliquotæ in antecedentibus inæquali numero continentur; & illa ratio major eſt, cujus vel conſequens, vel conſequentis aliquota ſæpius continetur in antecedente.

Fig. 26. *Ut ſi una centimilleſima CF ſæpius contineatur in AB, quam una centimilleſima NQ in GM, erit ratio AB ad CF major ratione GM ad NQ, quamvis innumeræ aliæ conſequentium CF, NQ ſimiles aliquotæ in antecedentibus AB, GM æquali numero continerentur.*

Porro æquali numero contineri dicuntur, cum ablatæ quoties poſſunt, æquali numero ſunt ablatæ.

Ex hoc indicio rationum irrationalium æqualitas, & inæqualitas continuo eluceſcit, cum ſic antecedentes conſequentibus incommenſurabiles per ablata conſequentibus commenſurabilia, & proportionalia exhauriantur.

7 Similes partes ſunt, quæ in ſuis totis æque, ſeu eodem modo continentur, ut qualis pars ſui totius eſt una, talis pars ſui totius ſit altera. Quod ſane nihil aliud eſt, quam partes ad ſua tota eandem habere rationem.

Similes vero partes aliquotæ ſunt, quæ ſua tota æqualiter metiuntur, ut ſi utraque ſit ſui totius una tertia, una decima, &c.

Fig. 6. 8 Magnitudines (ABCD) continue proportionales dicuntur, cum medii termini (B, C) bis ſumuntur; hoc eſt, cum ſunt conſequens reſpectu præcedentis, & antecedens reſpectu ſequentis.

Continuas rationes ſic efferimus, A eſt ad B, ut B ad C; & B eſt ad C, ut C ad D, & ſic deinceps.

9 Magnitudines diſcretim proportionales ſunt, cum nullus terminus bis accipitur.

Di-

Diſcretas rationes ſic efferimus: A eſt ad B, ut C ad F. Cum plures fuerint proportionales magnitudines, quam tres, ſi proportionales dicantur, ſemper intelligitur diſcretim. Fig. 1.

10 Cum magnitudines (ABCD) fuerint continue proportionales, prima (A) ad tertiam (C) habere dicitur rationem duplicatam ejus rationis, quam eadem prima (A) habet ad ſecundam (B); & prima (A) ad quartam (D) rationem habere dicitur triplicatam ejus, quam eadem prima habet ad ſecundam (B), & ſic deinceps. Fig. 6.

11 Homologæ, ſeu ſimiles ratione magnitudines dicuntur antecedentes antecedentibus, conſequentes conſequentibus. Ut ſi A eſt ad B, ut C ad F; homologæ erunt A, C, & B, F. Fig. 1.

Reliquæ definitiones commodius ex ipſis propoſitionibus intelligentur.

Quintus liber propoſitiones complectitur 25. Ex his 10. non alium uſum habent, quam ut reliquæ earum ope per multiplices demonſtrentur. Illis igitur prætermiſſis 15 reliquas proponemus ſolas Euclidis ordine non mutato. Porro hujus libri theoremata non ſolis lineis, ſed omnibus omnino quantitatibus conveniunt. Lineæ igitur, quibus hic utimur, omne genus quantitatis repræſentant.

Axioma.

Datis tribus quantitatibus A, B, C, dabilis eſt quarta Z, ad quam C eam proportionem habet, quam A habet ad B.

PROPOSITIO 1.2.3.4.5.6.

IN noſtra methodo ſunt ſuperflua.

PROPOSITIO VII.

Fig.7. *SI quantitates A, & B fuerint æquales, & alia quæpiam detur Z: erit A ad Z, ut B eſt ad Z; & Z erit ad A, ut eadem Z eſt ad B.*

Hæc propoſitio, ut & ſequentes quatuor, ſunt meriſſima axiomata, ac proinde nullo modo demonſtrari debent.

PROPOSITIO VIII.

Fig. 8. *SI quantitates [C, & F] fuerint inæquales, major C ad tertiam Z majorem habebit rationem, quam minor F habeat ad eandem Z.*

Et Z ad majorem C minorem habebit rationem, quam eadem Z habeat ad F, quæ minor eſt, quam C.

PROPOSITIO IX.

Fig.7. *SI A, & B ad Z eandem habeant rationem, æquales ſunt A, & B.*

Et ſi eadem Z ad A, & B eandem rationem habeat, rurſum A, & B æquales erunt.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO X.

SI C ad Z majorem rationem habeat, quam F ad Z, erit C major, quam F. Fig. 8.

Et ſi Z ad F majorem rationem habeat, quam eadem Z ad C, erit F minor quam C.

PROPOSITIO XI.

RAtiones, quæ eidem rationi ſunt æquales, eædem, ſimiles, [idem omnia ſignificant] ſunt æquales, eædem, ſimiles inter ſe. Fig. 9.

Ut ſi tam ratio A ad B, quam ratio C ad F ſint æquales rationi X ad Z, erunt quoque rationes A ad B, & C ad F æquales inter ſe. Sive ſi A ſit ad B, ut X ad Z, & C ſit ad F, ut X ad Z; erit quoque A ad B, ut C ad F.

Eodem modo rationes, quæ æqualibus ſunt æquales, inter ſe ſunt æquales.

PROPOSITIO XII.

SI ſingulæ magnitudines quotcumque [A, B, C] eandem habuerint proportionem ad ſingulas totidem [F, I, L,] quam proportionem habent ſingulæ ad ſingulas, ſive una [A] ad unam [F,] eandem habebunt omnes [A, B, C] ſimul ſumptæ ad omnes [F, I, L] ſimul ſumptas. Fig. 10.

Rem per ſe manifeſtam exemplo tantum aliquo

rationali declaro; ut ſi ſingulæ A B C ſingularum F, I, L ſint triplæ (hoc eſt, ſi ſingulæ ad ſingulas eandem habeant rationem quam 3 ad 1,) etiam A, B, C ſimul ſumptæ ſimul ſumptarum F, I, L triplæ erunt) hoc eſt, etiam A, B, C ſimul ſumptæ ad F, I, L ſimul ſumptas rationem habent eandem, quam 3 ad 1.) In proportione irrationali res æque clara eſt.

PROPOSITIO XIII. XIV.

IN noſtra methodo ſunt ſuperfluæ.

PROPOSITIO XV.

Fig. 10. *ALiquotæ ſimiles [F, I) eandem inter ſe rationem habent, quam totæ [A, B.]*

Fig. 11. *Et univerſim partes ſimiles [C, F] ſunt inter ſe ut totæ [A, B.]*

Vere inſtar axiomatis haberi poteſt, ſi recte intelligatur, quid ſint partes ſimiles. Vide defin. 7.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 11. vel 1. *SI prima [A] ſit ad ſecundam [B,] ut tertia [C] ad quartam [F,] etiam permutando erit prima [A] ad tertiam [C,] ut ſecunda [B] ad quartam [F.]*

Ponantur B, & F eſſe minores, quam A, & C, nam ſi æquales ſint, res patet. Quoniam A ponitur eſſe ad B, ut C ad F, erunt per defin. 7. B & F toto-

F totorum A, & C partes ſimiles, ac proinde per præced. quam proportionem inter ſe habent totæ A, C, eam quoque habent partes ſimiles B, F; hoc eſt, A eſt ad C, ut B ad F.

Scholium.

SI A eſt ad B, ut C ad F, etiam invertendo erit ut B ad A, ſic F ad C. Per ſe patet.

Apud Euclidem hoc eſt corollarium prop. 4. quæ cum in noſtra methodo tanquam ſuperflua ſit omiſſa, viſum eſt corollarium illud hoc loco ponere.

PROPOSITIO XVII.

SI antecedens unum [AB] ſit ad conſequens [CB] ut antecedens alterum [FI] ad conſequens alterum [LI;] etiam dividendo erit [AC] exceſſus antecedentis primi ſupra ſuum conſequens ad idem conſequens [CB,] ut [FL,] exceſſus antecedentis ſecundi ſupra conſequens ſecundum ad ſecundum conſequens [LI.] Fig. 12.

Axiomatis inſtar aſſumi poteſt: ſi tota AB, FI eandem rationem habeant ad X, & Z, etiam ſimilibus partibus mulctata eandem ad X, & Z pergent habere rationem; hoc eſt, adhuc AB ſic mulctata erit ad X, ut FI ſic mulctata ad Z. Id vero eſt, quod aſſerit propoſitio. Nam quia ponitur AB eſſe ad CB, ut FI ad LI, erunt *a* CB, LI ſimiles partes totorum AB, FI; & AC, FL erunt tota ſimilibus partibus mulctata. Cum ergo tota habuerint ad CB, LI eandem rationem, etiam AC, FL, (hoc eſt tota ſimilibus partibus mulctata) pergent ad CB, LI eandem inter ſe habere rationem,

a Per def. 7. l. 5.

tionem, hoc eſt adhuc erit AC ad CB, ut FL ad LI.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 12. *SI antecedens unum [AC] ſit ad conſequens unum [CB,] ut antecedens alterum [FL] ad conſequens alterum [LI;] etiam componendo erit [AC cum CB] primum antecedens cum ſuo conſequente ad idem conſequens [CB,] ut [FL cum LI] ſecundum antecedens cum ſuo conſequente ad conſequens [LI.]*

Rurſum enim inſtar axiomatis aſſumi poterit: ſi duæ quantitates AC, FL eandem ad X, & Z habeant rationem, etiam AC, FL ſimiliter, ſeu proportionaliter auctæ pergent ad X, & Z eandem habere rationem: hoc eſt adhuc erit AC ſic aucta ad X, ut FL ſic aucta ad Z. Id vero eſt quod propoſitio aſſerit. Nam ponitur AC eſſe ad CB, ut FL ad LI. Quare ſi ipſis AC, FL addantur CB, LI; erunt AC, FL proportionaliter, ſeu ſimiliter auctæ. Cum igitur AC, FL eodem modo ſe habeant ad CB, LI, etiam cum ſimiliter fuerint auctæ (hoc eſt ipſæ jam AB, FI) pergent ad eaſdem CB, LI eodem modo ſe habere; hoc eſt adhuc AB erit ad CB, ut FI ad LI.

Corollarium 1.

Fig. 12. SI antecedens unum (AB) fuerit ad conſequens (CB,) ut antecedens alterum (FI) ad conſequens alterum (LI,) etiam antecedens primum (AB) erit ad (AC) exceſſum ſuum ſupra conſequens, ut antecedens alterum (FI) eſt ad

(FL)

(FL) exceſſum ſuum ſupra conſequens alterum LI.

Cum enim AB ſit ad CB, ut FI ad LI, erit dividendo *a* AC ad CB, ut FL ad LI; & invertendo *b* BC ad CA, ut IL ad LF; & componendo *c* BA ad CA, ut IF ad LF. *a* Per 17. l. 5. *b* Per Schol. p. 16. l. 5. *c* Per 18. l. 5.

Hæc argumentatio vocatur converſio rationis.

Corollarium 2.

SI AC eſt ad AB, ut FL ad FI, erit quoque AC ad CB, ut FL ad LI; & AB ad CB, ut FI ad LI. Fig. 12.

Cum enim ſit ut AC ad AB, ſic FL ad FI, erit invertendo BA ad CA, ut IF ad LF; & divid. *d* BC ad CA, ut IL ad LF; & rurſum invertendo AC ad CB, ut FL ad LI, & compon. *e* AB ad CB, ut FI ad LI. *d* Per 17. l. 5. *e* Per 18. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

SI ut totum [AB] eſt ad totum [FI,] ita ablatum [CB] ſit ad ablatum [LI;] etiam ut totum eſt ad totum, ita reliquum [AC] erit ad reliquum [FL.] Fig. 12.

Omnino clarum eſt per ſe. Poteſt tamen ex præcedentibus ſic oſtendi; quoniam A B eſt ad FI, ut C B ad L I, erit permutando *a* A B ad CB, ut FI ad LI. Ergo per converſionem rationis AB eſt ad AC, ut *b* FI ad FL. Ergo permutando *c* ut AB ad FI, ita AC ad FL. *a* Per 16. l. 5. *b* Per cor. 1. præced. *c* Per 16. l. 5.

PRO-

PROPOSITIO XX. XXI.

IN *noſtra methodo ſunt ſuperflua*.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 13. SI *fuerit A ad B, ut O ad Q, & B ad C, ut Q ad R, & ſic deinceps erit ex æquo ut A prima ad C ultimam, ita O prima ad ultimam R.*

Ponantur C, R, eſſe minores, quam B, Q; eadem foret oſtenſio, ſi majores ponerentur. Quoniam *a* B eſt ad C, ut Q ad R; erunt C, R totorum B Q *b* partes ſimiles. Cum igitur A, & O ad B, & Q eandem habeant rationem, habebunt quoque ad C, & R, quæ ſunt ipſorum B, & Q partes ſimiles, eandem rationem. Inſtar enim axiomatis eſt, ſi duæ quantitates ad alias duas eandem inter ſe habuerint rationem, etiam ad partes earum ſimiles eandem inter ſe habere rationem.

a Per hyp.
b Per def. 7. l. 5.

Si plures fuerint utrinque quantitates, quam tres, eodem ratiocinio procedatur ad reliquas.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 14. SI *fuerit ut A prima ad B ſecundam, ita O prima ad Q ſecundam, & ut B ſecunda ad C tertiam, ita tertia quæpiam R ad primam O, erit ex æquo ut A prima ad C tertiam, ita R tertia ad Q ſecundam.*

Ut B eſt ad C, ita *o* poteſt Q eſſe ad aliam quampiam

o Per axio. ante 1. l. 5.

piam S. Jam quia ut B ad C, ſic *p* R eſt ad O, & ut B ad C, *q* ſic Q eſt ad S, erit R ad O, *a* ut Q ad S. Igitur permutando *b* R eſt ad Q, ut O ad S. Deinde, quia O eſt ad Q, ut *f* A ad B, & Q eſt ad S, *i* ut B ad C, ex æquo erit O ad S, ut *c* A eſt ad C. Sed jam oſtendi R eſſe ad Q, ut O eſt ad S. Ergo etiam *d* R eſt ad Q, ut A ad C.

p Per hyp. *q* Per conſt. *a* Per 11. l. 5. *b* Per 16. l. 5. *f* Per hyp. *i* Per conſt. *c* Per præced. *d* Per 11. l. 5.

Vocatur a Geometris hæc ratio perturbata.

PROPOSITIO XXIV.

SI fuerit ut A ad B, ita C ad F, & ut I ad B, ita L ad F, erit ut A cum I ad B, ita C cum L ad F. Fig. 15.

Quoniam I per hyp. eſt ad B, ut L ad F, erit quoque *a* invertendo B ad I, ut F ad L. Cum igitur A ſit ad B, *b* ut C ad F, & B ad I, ut F ad L, ex æquo erit *c* ut A ad I, ſic C ad L. Igitur *d* componendo ut AI eſt ad I, ſic CL eſt ad L. I vero eſt ad B, *e* ut L ad F. Rurſum igitur *f* ex æquo AI eſt ad B, ut CL ad F.

a Per ſchol. p. 16. l. 5. *b* Per hyp. *c* Per 22. l. 5. *d* Per 18. l. 5. *e* Per hyp. *f* Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXV.

SI quatuor magnitudines [AB, CF, I, L] fuerint proportionales, maxima [AB,] & minima [L] duabus reliquis [CF, & I] majores erunt. Fig. 16.

Sit AB ad CF, ut I ad L. Ex maxima AB ſumatur AQ æqualis I, & ex CF ſumatur CR par minimæ L. Erit igitur AB tota ad totam CF, ut ablata AQ ad ablatam CR. Ergo reliqua QB eſt ad reliquam *a* RF, ut tota AB ad totam CF. Sed AB major *b* eſt, quam CF. Ergo

a Per 19. l. 5. *b* Per hyp.

Ergo & QB major, quam RF. Jam vero quia AQ ipſi I, & CR ipſi L æquales ſunt, etiam AQ cum L ipſi I cum CR æquales erunt. Quare, ſi ad AQ cum L addatur majus QB, & ad I cum CR addatur minus RF, erit totum AQB cum L majus toto I cum CRF. Quod erat demonſtrandum.

Quæ ſequuntur non ſunt propoſitiones Euclidis, ſed ex Pappo Alexandrino, aliiſque deſumptæ ob frequentem earum uſum Euclidæis ſubjungi ſolent.

PROPOSITIO XXVI.

Fig. 17. *SI prima [A] ad ſecundam [B] majorem rationem habeat, quam tertia [C] ad quartam [F,] habebit invertendo [B] ſecunda ad [A] primam minorem rationem, quam [F] quarta ad (C) tertiam.*

Quoniam ponitur A habere ad B majorem rationem, quam C ad F. Igitur A ad *o* aliquam BX (quæ *a* major erit quam B) eandem habebit rationem, quam C ad F. Invertendo igitur erit BX ad A, ut F ad C, ac proinde *b* B ad A in minori ratione erit, quam F ad C.

o Per axio. ante 1. l. 5.
a Per 10. l. 5.
b Per 8. l. 5.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 17. *SI A habet ad B majorem rationem, quam C ad F, etiam permutando A ad C majorem rationem habebit, quam B ad F.*

Quoniam ratio A ad B ponitur major ratio-

ne C

ne C ad F, erit *o* ratio A ad aliam BX (quæ neceſſario major eſt, quam *a* B) æqualis rationi C ad F. Jam igitur *b* permutando A erit ad C, ut BX ad F. Sed BX ad F eſt in majori ratione, *c* quam B ad F. Ergo etiam A eſt ad C in majori, quam B ad F.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

o Per axio.ante 1.l.5. *a* Per 10. l.5. *b* Per 16. l.5. *c* Per 8. l.5.

PROPOSITIO XXVIII.

SI AB ad BC majorem rationem habet, quam FI ad IL etiam componendo AC ad BC majorem rationem habet, quam FL ad IL. Fig.12.

Quoniam ponitur AB ad BC eſſe in majori ratione, quam FI ad IL. Ergo *o* alia OB (quæ neceſſario erit minor, *a* quam AB) eſt ad BC, ut FI ad IL. Ergo *b* componendo OC eſt ad BC, ut FL ad IL. Ergo AC eſt ad BC in *c* majori, quam FL ad IL.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

o Per axio.ante 1.l.5. *a* Patet ex 10.l.5. *b* Per 18. l.5. *c* Per 8. l.5.

PROPOSITIO XXIX.

SI AC ad BC majorem rationem habet, quam FL ad IL, etiam dividendo AB ad BC majorem habet rationem, quam FI ad IL. Fig.12.

Quia ponitur AC ad BC majorem habere rationem, quam FL ad IL. Ergo *o* alia OC (quæ neceſſario minor erit, *a* quam AC) erit ad BC, ut FL ad IL. Jam igitur erit dividendo *b* OB ad BC, ut FI ad IL. Ergo AB eſt ad BC in majori, *c* quam FI ad IL.

Idem ſimiliter demonſtrabitur de proportione minori.

o Per axio.ante 1.l.5. *a* Per 10. l.5. *b* Per 17. l.5. *c* Per 8. l.5.

PRO-

Digitized by Google

PROPOSITIO XXX.

Fig. 18. *SI AC ad BC majorem rationem habet, quam FL, ad IL convertendo habebit AC ad AB minorem, quam FL ad FI.*

Quoniam AC eſt ad BC in majori, quam FL ad IL, erit dividendo *a* AB ad BC in majori, quam FI ad IL. Ergo invertendo *b* CB ad BA eſt in minori, quam LI ad IF. Ergo componendo *c* CA eſt ad BA in minori, quam LF ad IF.

a Per 29. l. 5. *b* Per 26. l. 5. *c* Patet ex 28. l. 5.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 19. *SI AB ad C majorem rationem habeat, quam F ad I, & C ad L Q majorem rationem habeat, quam I ad S, & ſic deinceps, etiam prima AB ad ultimam L Q majorem rationem habebit, quam prima F ad ultimam S.*

Quoniam AB eſt ad C in majori, quam F ad I. Ergo alia *o* quæpiam OB (quæ neceſſario minor *a* erit, quam AB) eſt ad C, ut F ad I. Et quia C eſt ad LQ in majori, quam I ad S. Ergo C ad aliam quampiam LR (quæ erit neceſſario major, quam LQ) eſt, ut I ad S. Igitur ex æquo *c* OB eſt ad LR, ut F ad S. Ergo OB eſt ad LQ in majori, quam *d* F ad S. Ergo AB eſt ad LQ *e* in multo majori, quam F ad S.

o Per axio. *a* Per 10. l. 5. *c* Per 22. l. 5. *d* Per 8. l. 5. *e* Per eand.

PROPOSITIO XXXII.

SI AB ad C majorem rationem habet, quam I ad S; & C ad LQ majorem, quam F ad I, etiam ex æquo habebit majorem rationem AB ad LQ, quam F ad S. Fig. 19.

Demonſtratio eadem, quæ præcedentis, ſed pro 22. citetur 23.

PROPOSITIO XXXIII.

SI tota (AB) ad totam (FI) majorem rationem habuerit, quam ablata (CB) ad ablatam (LI), tota ad totam minorem rationem habebit, quam reliqua (AC) ad reliquam (FL.) Fig. 12.

Quia AB eſt ad FI in majori, quam CB ad LI, erit *a* permutando etiam AB ad CB in majori, quam FI ad LI. Ergo convertendo *b* AB eſt ad AC in minori, quam FI ad FL. Ergo etiam permutando *c* AB eſt ad FI in minori, quam AC ad FL.

a Per 27. l. 5.
b Per 30. l. 5.
c Patet ex 27. l. 5.

PROPOSITIO XXXIV.

SI rationes (A ad C, & E ad O) ſunt æqualium rationum (A ad B, & E ad F) duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps, æquales ſunt etiam ipſæ. Fig. 20.

Quia ratio A ad C duplicata eſt rationis A ad B, erit *a* ut A ad B, ſic B ad C. Ob eandem cauſam erit ut E ad F, ſic F ad O. Cum ergo ſit ut A ad B,

a Per defi. 10. l. 5.

ſic per hyp. E ad F; & ut B ad C, ſic F ad O (nam ut B ad C, ſic A ad B, hoc eſt E ad F, hoc eſt F ad O,) igitur *b* ex æquo erit ut A ad C, ſic E ad O.

b Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XXXV.

Fig. 20.

SI rationes æquales A ad C, & E ad O ſint duplicatæ, aut triplicatæ, & ſic deinceps rationum A ad B, & E ad F, etiam hæ æquales erunt.

Si negas, ſit ut A ad B, ſic E ad aliam Z inæqualem ipſi F, & fiat ut E ad Z, ſic Z ad X. Quoniam igitur rationum æqualium A ad B, & E ad Z duplicatæ *c* ſunt rationes A ad C, & E ad X, etiam ratio E ad X æqualis erit *d* rationi A ad C: hoc eſt per hyp. rationi E ad O. Ergo *e* æquantur O & X. Ergo patet etiam medias F, & Z æquales eſſe. Ergo A eſt ad B, ut E ad F, ſeu Z. Quod erat demonſtrandum.

c Per def. 10. l. 5.
d Per præc.
e Per 9. l. 5.

Ex contradictorio aſſertionis directe illata eſt aſſertio.

PARS

Digitized by Google

PARS SECUNDA.

Euclidæa per multiplices definitio æqualium rationum demonſtratur, exhibeturque, ac demonſtrabitur aliud magis immediatum, & facilius indicium æqualitatis rationum.

PRoportionum elementis methodo (niſi fallor) commodiori explicatis, reliquum eſt, ut quod ſecundo loco promiſeram, præſtare aggrediar. Hoc igitur loco (quod a nullo hactenus factum eſt) demonſtrabimus, nihil aſſumendo, niſi quod per ſe lumine naturali ſit manifeſtum, duas rationes inter ſe æquales eſſe, quando antecedentium qualibet æque multiplices conſequentium æque multiplicibus ſemper ſunt vel pariter majores, vel pariter minores, vel pariter æquales. Cujus quidem negotii cum ſatis ardua, atque prolixa ſit demonſtratio, ut jam reipſa cognoſcemus, facile apparebit, præpoſtere egiſſe Euclidem, qui æqualitatis rationum primum, & fundamentale indicium ſumi voluit ex hac multiplicium indemonſtrata hactenus proprietate, cujus tam remota, & obſcura ſit cum rationum æqualitate connexio.

Lemma I.

SIt A ad B, ut C ad F; & ſint antecedentium A, C qualibet æque multiplices I, Q nimirum vel dupla, vel tripla, & ſic deinceps. Sint item conſequentium B, F qualibet æque multiplices L, R. Fig. 21.

Erit quoque ut I ad L, ſic Q ad R.

Quoniam enim A eſt ad B, ut C ad F, etiam I

 dupla

dupla ipſius A ad B, ut Q dupla ipſius C eſt ad F: & I tripla A erit ad B, ut Q tripla C ad F. Et ſic in infinitum. Quod quidem æque eſt per ſe clarum, ac quodlibet axioma. Quoniam igitur I eſt ad B, ut Q ad F, erit quoque I ad L duplam ipſius B, ut Q ad R duplam ipſius F; & ut I ad L triplam ipſius B, ita Q ad R triplam F; & ſic in infinitum, quod rurſus tam clarum eſt, quam axioma quodcunque. Liquet ergo propoſitum.

Lemma 2.

Fig. 22. *SI quantitates A, B habeant communem menſuram C, erit A toties ſumpta, quoties eſt C in B, æqualis quantitati B toties ſumptæ, quoties C eſt in A.*

Ponatur C contineri in B quater, & in A ſexies, ac proinde B eſſe 4 C, & A eſſe 6 C. Igitur 6 C (hoc eſt A) ducta in 4 C (hoc eſt toties ſumpta, quoties C eſt in B) efficiunt 24 C. Similiter 4 C (hoc eſt B) ducta in 6 C (hoc eſt toties ſumpta, quoties C eſt in A) efficiunt etiam 24 C. Ergo A toties ſumpta, quoties C in B, æquatur B toties ſumptæ, quoties C in A.

Theorema 1.

Fig. 23. *SI ratio AB ad FI major ſit ratione L ad R, tales ſumi poſſunt antecedentium (AB, & L) æque multiplices, tales item æque multiplices conſequentium (FI, & R,) ut multipla antecedentis AB rationis majoris excedente multiplam conſequentis (FI), multiplex antecedentis L rationis minoris non excedat multiplicem ſui conſequentis (R.)*

Sit ratio AB ad FI major ratione L ad R, & ſint AB, & L majores rationum termini. Quoniam igi-

igitur A B ad F I majorem habet rationem, quam L ad R; alia quædam quantitas Z a *habebit ad F I eandem rationem, quam L ad R. Quia jam igitur ratio Z ad F I æqualis eſt rationi L ad R, poniturque ratio AB ad F I major ratione L ad R, erit quoque ratio AB ad F I major ratione Z ad F I, ac proinde AB major eſt, quam Z: quæ omnia per ſe ſunt manifeſta. Igitur ex AB ſumi poterit AC par Z: eritque etiam AC ad F I, ut L ad R. Auferatur reſiduum BC ex AC quoties poteſt, puta ter; tum ſeca AC in tot æquales partes, ex gr. in 6. donec earum una poſſit auferri ſæpius ex F I, quam BC ex AC, puta quater, & reſiduum eſto O I, quod erit minus una particula. Hoc quoque fieri poſſe per ſe eſt manifeſtum, & patet ex pr. 1. lib. 10. quæ a proportionibus non dependet. Particularum vero illarum quantitas eſto Q.*

a Per ax. ante n. 1. 5.

Quoniam igitur Q eſt menſura communis quantitatum AC, FO, ergo AC toties ſumpta, quoties Q eſt in F O, nempe quater, æquatur F O toties ſumpta, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies. Deinde quia reſiduum O I eſt minus una particula, hoc eſt, quam Q, erit O I toties accepta, quoties Q eſt in AC, nempe ſexies, adhuc minor, quam AC. Ulterius, quia BC minus ſæpe auferri poteſt ex AC, quam Q ex F I (poſitum quippe fuit BC ex AC auferri tantū poſſe ter, Q vero quater ex F I,) manifeſtum eſt, BC toties ſumptum, quoties Q in F I, nempe quater, majus fore, quam AC, ac proinde multo majus eſſe, quam O I ſumptum ſexies, quod oſtendi ſupra eſſe minus, quam AC. Atqui oſtenſum eſt AC ſumptum quater, & FO ſumptum ſexies eſſe æqualia. Quare ſi AC ſumpto quater addatur BC quater, & ad FO ſexies ſumptum addatur O I ſexies, erunt 4 AC, & 4 BC, hoc eſt 4 AB majora, quam

I 3 *6 FO,*

6 FO, & 6 OI, hoc eſt, quam 6 FI. Quia vero 4 AC æqualia erant 6 FO, erunt 4 AC minora 6 FI. Sed ut AC ad FI, ita ponebatur ſupra L eſſe ad R. Ergo per lemma 1. etiam 4 L minora ſunt quam 6 R. Accepta ſunt igitur antecedentium AB, & L æque multiplices, nempe quadrupla, item æque multiplices conſequentium FI, & R, nempe ſecupla, & tamen oſtenſum eſt multiplam antecedentis AB (nempe 4 AB) ſuperare multiplicem conſequentis FI (nempe 6 FI:) multiplicem vero antecedentis L (nempe 4 L) non excedere multiplicem conſequentis R (nempe 6 R.) Quod erat demonſtrandum,

Theorema 2.

Fig. 21. *SI antecedentium (A, C) qualibet æque multiplices quibuslibet conſequentium (B, F) æque multiplicibus ſint vel ſimul majores, vel ſimul minores, vel ſimul æquales, ratio (A ad B) rationi (C ad F) æqualis erit.*

Si negas, ſit ratio A ad B major ratione C ad F. Ergo per theor. præc. poterunt antecedentium A, C ſumi tales æque multiplices, item tales conſequentium B, & F æque multiplices, ut multipla antecedentis A excedente multiplam conſequentis B, multipla antecedentis C non excedat multiplam conſequentis F, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim. Ergo &c.

In hac demonſtratione, uti & in ſequentibus, ea ſolum propoſitiones ex quinto libro adhibentur, quæ per ſe æque ſunt manifeſta, atque ipſa axiomata.

Theo-

Theorema 3.

SI ſumi poſſint antecedentium (O, R) tales aque multiplices, itemque tales aque multiplices conſequentium (Q, S,) ut multipla antecedentis unius (O) ſuperante multiplam conſequentis(Q,)multipla antecedentis alterius (R) non excedat multiplam ſui conſequentis (S,) erit ratio (O ad Q), cujus antecedentis multiplex ſuperat multiplicem conſequentis, major ratione altera (R ad S.) Fig. 24.

Rationes illas inaquales eſſe ſic oſtendo. Si eſſent aquales, quacunque antecedentium aque multiplices (ut patet a fortiori ex lemmate primo) quibuſcunque aque multiplicibus conſequentium, vel ſimul majores eſſent, vel ſimul minores, quod eſt abſurdum, quia evertit hypotheſim.

Quod autem ratio O ad Q major ſit, cujus antecedentis multiplex ſuperat, ſic oſtendo. Si negas, ſit ratio R ad S major ratione O ad Q. Ergo per theorema 1. *tales accipi poſſunt antecedentium R, & O aque multiplices, taleſque item aque multiplices conſequentium S, & Q, ut multipla antecedentis R rationis majoris excedente multiplam conſequentis S multipla antecedentis O non excedat multiplam conſequentis Q; non autem tales (quod facile ex* 1. *lemmate oſtendi)ut multipla O excedente multiplam Q multipla R non excedat multiplam S. Quod eſt abſurdum, cum evertat hypotheſim.*

Theorema 4.

CUm proportio irrationalis eſt, nulla multiplex antecedentis ulli conſequentis multiplici aqualis eſſe poteſt. Quare, cum per multiplices inquiritur proportionum irrationalium aqualitas, ſo- Fig. 25.

lummodo multiplicium ſimultaneus exceſſus, defectuſque ſpectari debent.

Fig. 25. *Sit proportio irrationalis A ad B. Si A aliquoties ſumpta poſſet fieri æqualis B aliquoties ſumpta, ac proinde eandem ambæ efficere quantitatem Z, ſingulæ A, & B eſſent eidem Z commenſurabiles, ac proinde & commenſurabiles inter ſe, contra hypotheſim.*

Quia tamen ſecundum theorema tam ad rationales proportiones pertinet, quam ad irrationales, ſimultaneo exceſſui, & defectui æqualitatem ſimultaneam addidimus cum Euclide.

Demonſtratis hunc in modum, quæ ab Euclide defin. 5. & 6. ponuntur, jam omnes ejus quinti, & ſexti libri demonſtrationes ſubſiſtunt, patetque, multiplicium illum exceſſum, defectumque ſimultaneum infallibile indicium eſſe æqualitatis rationum, non quidem per ſe immediate; ſed demonſtratione, quam modo dedimus, prius rite intellecta.

Verum, quia indicium per multiplices quantumvis jam ſecurum, nihilominus remotum eſt, & implexum, hic aliud clariſſimum, & proximum, quod promiſi ſupra, demonſtrabo.

Theorema 5.

Fig. 26. *SI conſequentes (CF, NQ), & conſequentium quælibet aliquotæ ſimiles (puta & decimæ, & centeſimæ, & milleſimæ, & ita deinceps ſine termino) in antecedentibus (AB, GM) æquali ſemper numero contineantur, rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) æquales erunt.*

Nota, æquali numero contineri dicuntur, cum, ſi auferantur quoties poſſunt, æqualis eſt utrinque numerus ablatarum.

De-

Demonſtr. Si negas, erit ratio alterutra, puta AB ad CF, major ratione GM ad NQ. Quoniam igitur AB ponitur ad CF majorem habere rationem, quam GM ad NQ, manifeſtum eſt, aliquam (puta AD) minorem, quam AB æqualem habere rationem ad CF, quam GM ad NQ. Manifeſtum ſimiliter eſt, aliquam ipſius BF aliquotam (ex. g. unam trigeſimam) eſſe minorem differentia DB: Sit CE una trigeſima ipſius CF, & auferatur ex AB quoties poteſt, ex. gr. millies, totumque ablatum ſit AO. Quoniam igitur AO eſt 1000 *CE, & CF eſt* 30 *CE, erit AO ad CF, ut* 1000 *ad* 30.

Sumatur jam ex NQ aliquota NP ſimilis alteri CE, nempe etiam una trigeſima. Quoniam ex hyp. CE, NP æquali numero in AB, GM continentur; & CE ablata ex AB quoties potuit, ablata fuit millies, etiam NP ex GM auferri poterit millies. Quia ergo totum ablatum GK eſt 1000 *NP, & NQ eſt* 30 *NP, erit GK ad NQ, ut* 1000 *ad* 30*, hoc eſt, ut AO ad CF. Quia vero CE ablata ex AB quoties potuit, reliquit OB, erit OB minus, quam CE. Sed CE, nempe una trigeſima CF, eſt minor poſita quam DB. Ergo OB eſt multo minor, quam DB. Ergo AO eſt major, quam AD. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quam AD ad CF. Sed ponebatur eſſe AD ad CF, ut GM ad NQ. Ergo AO ad CF majorem rationem habet, quam GM ad NQ; hoc eſt multo majorem, quam GK ad NQ. Quod eſt abſurdum, quia oſtendi ſupra AO eſſe ad CF, ut GK ad NQ. Non poſſunt igitur rationes datæ AB ad CF, & GM ad NQ eſſe inæquales. Æquales igitur ſunt. Quod erat demonſtrandum.*

Theo-

Theorema 6.

Fig.26. *SI aut conſequentes (CF , NQ), aut conſequentium aliquæ ſimiles aliquota (ex. gr. decimæ) inæquali numero in antecedentibus (AB, GM) contineantur, rationes (AB ad CF, & GM ad NQ) inæquales erunt, & erit illa major, cujus conſequentis aliquota ſæpius continetur.*

Contineatur CE decima una ipſius CF in AB millies, & ſit AO 1000 CE; tum vero reſiduum OB erit minus, quam una CE. Deinde NP una decima NQ contineatur in GM tantum nongenties nonagies ſepties, & ſit GK 997 NP ; patet reſiduum KM fore minus una NP, ac proinde 1000 NP fore majores, quam GM. Sit ergo GR 1000 NP. Quoniam igitur AO eſt 1000 CE, & GR 1000 NP; CF vero 10 CE, & NQ 10 NP, erit AO ad CF, ut GR ad NQ. Ergo AB eſt ad CF in majori ratione, quam GR ad NQ; ac proinde in multo majori, quam GM ad NQ. Quod erat demonſtrandum.

Habemus jam igitur indubitatum, facillimumque indicium, ex quo rationes æquales, inæqualeſque certo liceat diſcernere. Et poſſemus ex illo omnes, quæ quidem axiomata non ſint, lib. 5. propoſitiones, quas per multiplices Euclides demonſtrat, multo expeditius demonſtrare, niſi magis ex uſu diſcentium putaremus, illas ea methodo, qua in prima parte uſi jam ſumus, proponere.

TER-

TERTIA PARS.

De proportionum denominatoribus, algorythmo, compoſitione.

I.

Proportionis diviſio.

PRima diviſio eſt in rationalem, & irrationalem, ut dictum defin. 4. utraque dividitur in rationem æqualitatis, & inæqualitatis. Ratio inæqualitatis dividitur in rationem majoris inæqualitatis, quæ habet antecedens majus conſequente, & in rationem minoris inæqualitatis, quæ habet antecedens minus conſequente.

Rationalis proportio inæqualitatis majoris dividitur in quinque ſpecies, quæ ſunt: multiplex, ſuperparticularis, ſuperpatiens, multiplex ſuperparticularis, multiplex ſuperpatiens.

Ratio multiplex eſt, quando major minorem aliquoties continet, ut bis, ter, quater, &c. diciturque ratio dupla, tripla, quadrupla.

Ratio ſuperparticularis eſt, quando major minorem continet ſemel, & unam ejus partem aliquotam: ut ratio 3 ad 2, vel 6 ad 4, quæ dicitur ſeſquialtera, quia major minorem continet ſemel, & ejus dimidium; ratio 4 ad 3, ſive 16 ad 12, quæ dicitur ſeſquitertia, quia major minorem continet ſemel, & tertiam ejus partem, & ſic deinceps.

Ratio ſuperpatiens eſt, cum major minorem continet ſemel, & plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam. Talis eſt ratio 8 ad 5, vel 14 ad 10, quia 8 continet 5 ſemel, & inſuper 3,

hoc eſt tres quintas ejuſdem numeri 5, *quæ tamen ſimul ſumptæ non conficiunt unam aliquotam ipſius* 5. *Similiter* 14 *continet* 10 *ſemel, & bis* 2, *hoc eſt duas quintas numeri* 10, *quæ tamen ſimul ſumptæ* (*nempe* 4) *non conficiunt unam aliquotam ipſius* 10. *Additur porro*, non conficientes unam aliquotam, *quia alias eſſet ratio ſuperparticularis*.

Ratio multiplex ſuperparticularis eſt, cum major majorem aliquoties continet, & inſuper unam ejus aliquotam, ut ratio 5 *ad* 2, 10 *ad* 4, *&c.*

Ratio multiplex ſuperpatiens eſt, cum major minorem aliquoties continet, & adhuc plures ejus aliquotas non conficientes unam aliquotam, ut ratio 8 *ad* 3, 16 *ad* 6, *&c.*

II.

De Denominatore Proportionis rationalis.

Denominator proportionis rationalis eſt, qui diſtincte, & clare exprimit habitudinem unius numeri ad alterum; ſive qui ita ſe habet ad unitatem, ut majus ad minorem, ac proinde oſtendit, quoties major minorem contineat, & quoties minor contineatur a majore. Rationis 27 *ad* 9 *denominator eſt* 3, *quia ita eſt ad unitatem, ut* 27 *ad* 9, *ac proinde oſtendit quoties conſequens in antecedente continetur, nempe ter.*

Cujuſcunque rationis denominator invenitur, ſi major terminus dividatur per minorem, nam quotiens diviſionis erit denominator. Ratio eſt, quia quotiens ita eſt ad unitatem, ut dividendus ad diviſorem, hoc eſt ut major ad majorem.

Exem-

Exempl. Detur ratio 60 ad 6. Divide 60 per 6, quotiens 10 eſt denominator. Detur rurſum ratio 60 ad 16, diviſo 60 per 16, ſit quotiens $3\frac{3}{4}$, *hic erit denominator.*

III.

De Denominatoribus Proportionum irrationalium.

Cum rationes irrationales fuerint reducta ad rationes commune conſequens habentes, communis conſequentis antecedentia erunt rationum denominatores, & commune conſequens munus, ac locum explet unitatis.

Proportionis nullius irrationalis, ſi ſola ſit, exhiberi poteſt denominator. At ſi dua fuerint, vel plures proportiones irrationales, alio quodam ſenſu earum denominatores poterunt exhiberi, qui nimirum oſtendant, quomodo una ratio ad alteram ſe habeat. Id quod egregie obſervavit P. Gregorius a S. Vincentio operis ſui Geometrici lib. 8. defin. 2. Qui vir cum praclariſſimis, & prope innumeris inventis Geometriam auxit, tum in primis lib. 8. ejuſdem operis de proportionalitatibus ita ſcripſit, ut novam de proportionalitatibus ſcientiam condidiſſe cenſeri merito debeat. Data ſint rationes irrationales A ad B, & C ad D, qua revocentur ad rationes FH, GH habentes commune conſequens H ſic, ut ratio F ad H ſit par rationi A ad B, & ratio C ad D par rationi G ad H; commune conſequens H munus explebit unitatis, & antecedentia F, G erunt denominatores rationum F ad H, & G ad H (hoc eſt ratio- Fig. 27.

num

num A ad B, & C ad D,) quia oſtendunt quomodo una ratio ſe ſe habeat ad alteram; ſicuti enim F eſt ad G, ita ratio FH eſt ad rationem GH, hoc eſt ratio AB ad rationem CD.

IV.

Axiomata.

Fig. 28. *Axiom. 1. Rationes (F ad H, & G ad H) commune habentes conſequens (H) eam inter ſe proportionem habent, quam antecedentia (FG) eſt prop. 2. P. Gregorii a S. Vincentio lib. 8. quadr.*

Fig. 29. *Hoc eſt, ratio G ad H tanto major eſt ratione F ad H, quanto G major eſt, quam F.*

Axiom. 2. Rationes (I ad L, & I ad M) commune habentes antecedens reciprocam inter ſe habent conſequentium proportionem. Eſt prop. 7. P. Gregorii a S. Vincentio lib. 8. quadr.

Hoc eſt, ratio I ad L eſt ad rationem I ad M, ut reciproce eſt M conſequens ad conſequens L: ſive ratio I ad L tanto major eſt ratione ejuſdem I ad M, quanto L fuerit minor, quam M, ac proinde quanto M fuerit major, quam L.

Axiom. 3. Rationes rationales eam inter ſe rationem habent, quam denominatores. Patet ex axiom. 1.

Dentur ratio 12 ad 3, & ratio 15 ad 6, quarum denominatores ſunt 4, & $2\frac{1}{2}$. Ex definit. a Num. 2. *a denom. ratio 12 ad 3 eſt eadem cum ratione 4 ad 1, & ratio 15 ad 6 eſt eadem cum ratione $2\frac{1}{2}$ ad 1. Sed ratio 4 ad 1 eſt ad rationem $2\frac{1}{2}$ ad*

1, ut

1, *ut* b 4 *eſt ad* $2\frac{1}{2}$. *Ergo etiam ratio* 12 *ad* 3 *eſt ad rationem* 15 *ad* 6, *ut denominator* 4 *eſt ad denominatorem* $2\frac{1}{2}$. b Per ax. 1. hic.

V.

Rationum rationalium Additio, & Subtractio.

A*Dditio perficitur, ſi rationum denominatores addantur. Ratio enim, quam habet denominatorum ſumma ad unitatem, eſt rationum datarum ſumma quæſita.*

Dentur ratio 12 *ad* 3, *&* 15 *ad* 6, *earum denominatores* 4, *&* $2\frac{1}{2}$ *additi ſibi mutuo faciunt* $6\frac{1}{2}$. *Ratio* $6\frac{1}{2}$ *ad* 1 *eſt par rationi* 12 *ad* 3, *& rationi* 15 *ad* 6. *Patet ex axiom.* 1. *&* 3. Fig. 30.

Subtractio fit ablatione minoris denominatoris a majore, nam ratio reſidui ad unitatem eſt ratio, quæ remanet poſt minorem rationem a majori detractam. Patet ex axiom. 1. *&* 3.

Dentur rationes 12 *ad* 3, *&* 15 *ad* 6. *Harum denominatores ſunt* 4, *&* $2\frac{1}{2}$. *Aufer minorem* $2\frac{1}{2}$ *a majori* 4, *remanent* $3\frac{1}{2}$: *ratio* $\frac{3}{2}$ *ad* 1 *eſt ea, quæ remanet, ubi rationem* 15 *ad* 6, *ſeu* $2\frac{1}{2}$ *ad* 1 *detraxeris ex ratione* 12 *ad* 3, *ſeu* 4 *ad* 1.

VI.

Digitized by Google

VI.

Rationum irrationalium Additio, & Subtractio.

Fig. 31. *Rationes datæ (A ad B, & C ad D) reducantur ad rationes (F ad H, & G ad H) habentes commune conſequens (H.) Antecedentia F, & G ſibi addita ſunt F G. Ratio F G ad H eſt ſumma rationum F ad H, & G ad H, hoc eſt rationum A ad B, & C ad D. Patet ex axiom.* 1.

Subtractio perficitur, ſi rationes datæ ad commune conſequens reducantur, ac tum minus antecedens G auferatur a majori F; ratio enim reſidui ad H eſt ea, quæ remanet, poſtquam rationem G ad H, ſeu C ad D ſubtraxeris a ratione F ad H, ſeu A ad B. Patet ex 1. *axiom.*

VII.

Rationum rationalium multiplicatio, & diviſio.

Fig. 32. *Denominatores rationum per invicem multiplicati dabunt denominatorem rationis, quæ ex datarum rationum multiplicatione producitur.*

Hoc eſt, ratio, quam ad unitatem habet numerus ex denominatorum multiplicatione productus, eſt ea, quæ fit ex rationum multiplicatione. Patet ex axiom. 1. *&* 3. *Nam multiplicatio rationum eſt unius ad alteram additio ſæpius repetita. Hanc autem perfici repetita ſæpius antecedentium additione (hoc eſt multiplicatione), patet ex jam citatis axiom.* 1. *&* 3.

Sint

Sint data rationes 9 *ad* 3, *&* 20 *ad* 4, *denominatores* 3, *&* 5 *multiplicati faciunt* 15. *Ratio* 15 *ad* 1 *eſt ea, quæ ex multiplicatione rationum* 9 *ad* 3, (*ſeu* 3 *ad* 1) *&* 20 *ad* 4, (*ſeu* 5 *ad* 1) *producitur.*

Diviſio rationum perficitur, ſi denominator majoris dividatur per denominatorem minoris. Nam ratio quotientis ad unitatem eſt ea, quæ habetur ex diviſione rationis datæ majoris per rationem minorem. Patet ex 1. *&* 3. *axiom. Cum rationis per rationem diviſio ſit ſubtractio unius ab altera ſæpius repetita.*

VIII.

Multiplicatio rationum irrationalium.

Datæ ſint rationes A ad B, & C ad D per invicem multiplicandæ. Fiat ut A ad B, ita D ad E. Ratio C ad E eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Fig. 33.

Hæc operatio eſt Gregorii a S. Vincentio lib. 8. *propoſ.* 75. *Sed eam nec ipſe, nec alius quiſquam demonſtrat.*

Hunc igitur in modum demonſtrabitur. Ratio C ad E producitur ex multiplicatione rationum C ad D, & D ad E, ut patebit ex demonſtratione numeri XII. ab his independente. Sed rationes C ad D, & D ad E per conſt. ſunt rationes C ad D, & A ad B. Ergo ratio C ad E eſt ea, quæ fit ex multiplicatione rationum A ad B, & C ad D. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

IX.

Diviſio rationum irrationalium.

Fig. 33. *Data ſit ratio C ad E dividenda per rationem A ad B. Fiat ut A ad B, ſic C ad D. Ratio D ad E eſt quotiens.*

Nam ratio C ad D (hoc eſt per conſt. ratio A ad B) multiplicata per rationem D ad E producit rationem C ad E, ut patebit ex demonſtratione num. XII. ab his independente. Ergo ratio D ad E eſt quotiens, cum multiplicata in diviſorem, qui eſt ratio A ad B, reſtituat rationem C ad E, quæ proponebatur dividenda.

X.

De compoſitione rationum, ejus Definitio.

Ratio ex rationibus componi dicitur, cum rationum quantitates (hoc eſt denominatores) inter ſe multiplicatæ aliquam effecerint rationem. Eſt defin. 5. lib. 6. Euclidis.

Fig. 34. *Dentur rationes quotcunque, quarum denominatores ſint 2, 3, $1\frac{1}{4}$. Multiplica denominatorem 2 per 3 denom. fit 6 denominator rationis compoſitæ ex rationibus, quarum denominatores ſunt multiplicati. Hoc eſt, ratio 6 ad 1 eſt compoſita ex rationibus 6 ad 3, & 12 ad 4. Quod ſi denominatorem 6 multiplices per denominatorem tertium $1\frac{1}{4}$, fit $7\frac{1}{2}$ denominator rationis compoſitæ ex tribus datis rationibus, quarum denominatores ſunt 2, 3, $1\frac{1}{4}$.*

XI.

Compoſitio rationum non aliud eſt, quam rationum multiplicatio: & ratio omnis ex iiſdem rationibus componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

NAm, ut patet ex axiom. n.4. & ex n. 7. ratio, quæ ex plurium rationum multiplicatione producitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Atqui etiam per definit. Euclid. ratio, quæ ex pluribus rationibus componitur, ea eſt, quam quantitas ex denominatorum multiplicatione producta habet ad unitatem, ſeu conſequens commune. Ergo ratio ex iiſdem componitur, ex quarum multiplicatione producitur.

Scholium.

UT numeri ſequentis demonſtratio clarius percipiatur, obſervandum eſt multiplicari, ac dividi magnitudines per invitem cum analogia quadam ad numeros. Quemadmodum igitur numerus per numerum multiplicari dicitur, cum ut eſt unitas ad alterutrum, ita reliquus ſit ad alium quempiam, qui productum dicitur; ita plane magnitudo per magnitudinem dicetur multiplicari, cum ut quapiam recta pro unitate aſſumpta ſe habet ad alterutram datarum, ita reliqua ſiet ad aliquam quartam, quæ productum vocabitur: Pari modo quemadmodum numerus per numerum dividi dicitur, quando ut unus eſt ad alterum, ita unitas ſit ad alterum, qui quotiens nominatur: ita

Digitized by Google

quoque magnitudo per magnitudinem dicetur dividi, quando aſſumpta quantitate aliqua pro unitate, ut una ſe habet ad alteram, ita unitas ad aliam; quæ proinde dicetur quotiens.

XII.

Si fuerint quæcunque, & quotcunque quantitates, ſeu magnitudines, ſeu numeri, ratio prima ad ultimam componitur ex rationibus mediarum.

IN numeris demonſtratum eſt a Theone, Eutocio, & Vitellione. Qui in magnitudinibus demonſtraret, nemo hactenus inventus eſt. Unde Gregorius a S. Vincentio magnus Geometra lib. 8. ad principium ſecundum cenſet inter principia numerandum eſſe, donec alicui demonſtratio occurrerit, quæ inter theoremata referri poſſit.

Univerſalem igitur hujus rei demonſtrationem dare conabimur hunc in modum.

Demonſtratur in magnitudinibus.

Fig. 35. DAta ſint magnitudines quæcunque, & quotcunque A, B, C, D. Oſtendendum eſt, rationem A ad D componi ex rationibus A ad B, B ad C, C ad D.

Fiat ut B ad C, ita X ad B. Eruntque rationes A ad B, B ad C reductæ ad rationes A ad B, X ad B habentes commune conſequens B, ac proinde rationum denominatores ſunt A, X, & conſequens commune B a munus explet unitatis, quæ eſt commune conſequens reſpectu omnium denominatorum numericorum.

a Per n. 3.

Itaque, ſi velimus magnitudines A, X per invicem

cem multiplicare, oportebit b *facere, ut B unitas eſt ad X, ita A ad quartam Z, quæ erit productum multiplicationis A per X, ſeu X per A; plane ac ſi cupias invicem multiplicare numeros R, S, fit ut unitas ad unum numerum S, ita alter R ad quartum V, qui eſt productum multiplicationis.* b Schol. præc.

Quoniam igitur quantitas Z eſt productum ex multiplicatione denominatorum A, X, erit ratio c *hujus producti Z ad B unitatem, ſeu commune conſequens ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum A ad B, X ad B: prorſus ut in rationum numericarum multiplicatione numero VII. oſtendimus venire, in qua, ſi denominatores inter ſe multiplicentur, ratio producti ad unitatem ea eſt, quæ fit ex rationum multiplicatione.* c Per defin. n. 10.

Atqui per conſtr. ratio X ad B eſt ratio B ad C. Ergo etiam ratio Z ad B producitur ex multiplicatione rationum A ad B, B ad C. Quia vero per conſtr. ut B eſt ad X, ita A eſt ad Z, etiam inverſim Z ad A, ut X ad B, hoc eſt per conſtr. ut B ad C. Igitur permutando ut Z eſt ad B, ita A eſt ad C. Sed jam oſtenſum, rationem Z ad B produci ex multiplicatione rationum A ad B, B ad C. Ergo etiam ratio A ad C producitur ex multiplicatione rationum A ad B, & B ad C. Atqui num. XI. oſtenſum eſt, rationes componi ex iiſdem rationibus, ex quarum multiplicatione producuntur. Ergo ratio A ad C componitur ex rationibus A ad B, & B ad C.

Eodem modo demonſtrabitur ratio A ad D componi ex rationibus A ad C, & C ad D. Ergo ratio A ad D componitur ex rationibus A ad B, & B ad C, & C ad D. Et ſic deinceps in infinitum. Quod erat demonſtrandum.

Digitized by Google

Demonſtratur in numeris.

Eandem prorſus demonſtrationem valere in numeris jam oſtendam, unde etiam veritas illius, ac ſoliditas magis ſtabilietur.

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

Dati ſint tres numeri quicunque, ex. gr. 8, 4, 3. *Fiat ut* 4 *ad* 8, *ita* 1 *ad* 2, & *ut* 4 *ad* 3, *ſic* 1 *ad* $\frac{3}{4}$. *Erunt igitur rationes* 8 *ad* 4, & 2 *ad* 1; *item rationes* 4 *ad* 3, & 1 *ad* $\frac{3}{4}$ *inter ſe æquales; eritque ex æquo* a *etiam ratio* 8 *ad* 3 *æqualis rationi* 2 *ad* $\frac{3}{4}$.

a Per 22. l. 5.

Fiat deinde ut $\frac{3}{4}$ *ad* 1, *ita* 1 *ad* $\frac{4}{3}$; *eruntque rationes* 2 *ad* 1, & 1 *ad* $\frac{3}{4}$ (*hoc eſt rationes* 8 *ad* 4, & 4 *ad* 3) *reductæ ad duas rationes* 2 *ad* 1, & $\frac{4}{3}$ *ad* 1 *habentes commune conſequens unitatem; ac proinde* 2, & $\frac{4}{3}$ *erunt* b *rationum* 8 *ad* 4, & 4 *ad* 3 *denominatores. Multiplicentur jam per invicem denominatores* 2, & $\frac{4}{3}$, *hoc eſt fiat, ut* 1 *ad* $\frac{4}{3}$, *ita* 2 *ad* $\frac{8}{3}$. *Erunt* $\frac{8}{3}$ *productum ex* 2, & $\frac{4}{3}$ *denominatoribus rationum* 8 *ad* 4, & 4 *ad* 3 *inter ſe multiplicatis. Ergo ratio hujus producti* $\frac{8}{3}$ *ad* 1 *eſt ea, quæ* c *producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, & 4 *ad* 3. *Jam vero, quia per conſtr.*

	$\frac{8}{3}$	
8	2	$\frac{4}{3}$
4	1	
3	$\frac{3}{4}$	

b Patet ex n. 2.

c Patet ex n. 7.

ſtr. ut 1 *eſt ad* $\frac{4}{3}$, *ita* 2 *eſt ad* $\frac{8}{3}$, *erit etiam inverſim* $\frac{8}{3}$ *ad* 2, *ut* $\frac{4}{3}$ *ad* 1. *Sed rurſus per conſtr.* $\frac{4}{3}$ *ſunt ad* 1, *ut* 1 *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo* $\frac{8}{3}$ *ſunt ad* 2, *ut* 1 *ad* $\frac{3}{4}$. *Ergo permutando* $\frac{8}{3}$ *ſunt ad* 1, *ut* 2 *ad* $\frac{3}{4}$. *Sed jam oſtendi rationem* $\frac{8}{3}$ *ad* 1 *eſſe eam, quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 2 *ad* $\frac{3}{4}$ *eſt ea, quæ producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Sed oſtenſum eſt ſupra, rationem* 2 *ad* $\frac{3}{4}$ *parem eſſe rationi* 8 *ad* 3. *Ergo etiam ratio* 8 *ad* 3 *producitur ex multiplicatione rationum* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3. *Igitur per num. XI. ratio* 8 *ad* 3 *ex rationibus* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3 *compoſita eſt. Quod erat demonſtrandum.*

8 *Eodem modo demonſtrabitur, ſi plures*
3 *dentur numeri, quam tres, rationem* 8 *ad*
25 25 *componi ex rationibus* 8 *ad* 3 (*hoc jam*
73 *eſt ex rationibus* 8 *ad* 4, *&* 4 *ad* 3) *& ex ratione* 3 *ad* 25; *& rationem* 8 *ad* 73 *componi ex rationibus* 8 *ad* 25 (*hoc jam eſt ex rationibus* 8 *ad* 4, 4 *ad* 3, 3 *ad* 25) *& ratione* 25 *ad* 73, *& ſic in infinitum.*

XIII.

Si dentur quotcunque rationes A ad B, C ad D, E ad F, exhibebitur ratio ex omnibus compoſita. Fig. 36.

S*I fiat ut A ad B, ita quæpiam G ad H, & ut C ad D, ita H ad I, & ut E ad F; ita I ad K. Ratio enim G ad K erit compoſita ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K, ut numero præcedenti de-*

monſtravimus, hoc eſt per conſtr. ex rationibus datis A ad B, C ad D, E ad F.

XIV.

Ratio non eſt æqualis rationibus, ex quibus componitur.

Fig. 36. *INter duas quantitates G, K aliæ quantitates interponantur, ſive illæ ſint continuæ proportionales, ſive non: ratio prima G ad ultimam K non eſt æqualis rationibus intermediis G ad H, H ad I, I ad K, licet ex iis ſit compoſita. Nam ex iis componi idem eſt, quod produci ex earum multiplicatione mutua, ut oſtenſum eſt num. XI. Cum igitur ratio G ad K ſit producta ex rationibus G ad H, H ad I, I ad K inter ſe multiplicatis, ut ex demonſtratione num. XII. patet, non poſſunt rationes G ad H, H ad I, I ad K ſimul ſumptæ æquales eſſe rationi G ad K, niſi cum per accidens rationum additio, & multiplicatio eandem effecerint rationem. Ut igitur rationibus dictis habeatur una æqualis, erunt illæ ſibi mutuo addendæ, ut traditur numero V, & VI; ex qua additione proveniet ratio illis omnibus æqualis, quæ fere ſemper, ut dixi, erit diverſa ab illa, quæ ex earundem rationum compoſitione, hoc eſt multiplicatione, exſurget.*

ELE-

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER SEXTUS.

Proportionum doctrina libro quinto univerſim expoſita in ſexto figuris planis applicatur. Et ſunt, quæ hoc libro traduntur, adeo ſcitu neceſſaria, ut ſine illis arcana Geometriæ penetrare, fructuſque ſuaves Matheſeos percipere nemo poſſit. Ad propoſitiones prope ſingulas oporteret encomium texere, tanta omnium utilitas eſt.

DEFINITIONES.

1 Similes figuræ ſunt, quæ & ſingulos angulos ſingulis æquales habent, & latera, quæ æqualibus angulis opponuntur, vel quæ inter æquales angulos exiſtunt, vel quæ ſunt circa æquales angulos (eodem omnia recidunt) proportionalia.

Ut triangula X, Z dicentur ſimilia, ſi angulus A ſit æqualis angulo F, & angulus B angulo I, & angulus C angulo L: atque inſuper ſi AB ſit ad FI, ut BC ad IL; & BC ad IL, ut CA ad LF; & CA ad LF, ut AB ad FI, comparando ſemper latera æqualibus angulis oppoſita. Eodem modo aliarum figurarum rectilinearum omnium ſimilitudo explicabitur. Fig. 7. l. 6.

2 Reciprocæ figuræ ſunt, cum in utraque ante- Fig. 29.

ce-

cedentes, & conſequentes rationum termini fuerint.

Ut in parallelogrammis X, Z,
ſi AC ſit ad CB,
ut FC ad CL
antecedentia ſunt AC, FC, quorum in utraque figura unum eſt; & conſequentia ſunt CB, & CL, quorum ſimiliter in quaque figura unum eſt: parallelogramma proinde X, Z reciproca dicuntur. Idem de aliis figuris intellige.

Fig. 1. 3 Altitudo figuræ eſt perpendicularis a vertice ad baſim deducta. Eſt Euclidis 4.

Ut Trianguli ABC altitudo eſt perpendicularis AQ a vertice cadens in baſim BC, vel intra triangulum, vel extra in baſim protractam. Baſis autem, & vertex aſſumuntur ad libitum.

4 Similes arcus circulorum dicuntur, qui eandem habent ad totas ſuas circumferentias rationem.

Ut, ſi ambo ſint ſuæ circumferentiæ pars tertia, vel quarta, &c.

PROPOSITIO I.

Fig. 2. T*Riangula (ABC, DEF), & parallelogramma (AOPC, DQRF) quæ eandem habent altitudinem, ſive inter eaſdem exiſtunt parallelas, eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AC, DF.)*

Ab hoc theoremate dependet totus ſextus liber, imo quidquid uſpiam de figuris ſive planis, ſive ſolidis per proportiones demonſtratum eſt. Demonſtrat illam Euclides per multiplices, quæ in primo ſtatim aditu hujus libri tyrones perturbant. Aliam igitur demonſtrationem dabimus fa-

facillimam ex theor. 5. part. ſecundæ lib. 5. hunc in modum.

Sumatur baſeos DF quævis pars aliquota, ex. gr. DG una tertia, & ducatur recta GE, erit etiam triangulum DEG tertia pars trianguli DEF, ut colligitur ex 38. l. 1. Quare recta DG, & triangulum DGE ſunt conſequentium *a* ſimiles aliquotæ. Auferatur deinde DG ex baſi AC quoties poteſt, puta ſexies, ducanturque rectæ HB, IB, KB, LB, MB, NB. Quoniam CH, HI, &c. æquales ſunt ſingulæ ipſi DG, etiam ſex triangula CBH, HBI &c. triangulo DEG æqualia *b* erunt ſingula. Ergo quoties DG continetur in antecedente AC, toties triangulum DEG continetur in antecedente ABC. Eodem diſcurſu oſtendam, quaſcunque conſequentium (baſeos DF, & trianguli DEF) ſimiles aliquotas in antecedentibus (baſi AC, & triangulo ABC) æquali numero contineri. Ergo per theor. 5. partis ſecundæ lib. 5. ut baſis AC ad baſim DF, ita triangulum ABC ad triangulum DEF. Quod erat demonſtrandum.

a Per defin. 7. l. 5.

b Per 38. l. 1.

Quoniam vero parallelogramma AP, DR ſunt dupla *c* triangulorum ABC, DEF, etiam illa erunt inter ſe, ut baſes.

c Per 41. l. 1.

Corollarium.

Triangula (ABC, FIL), & parallelogramma æquales baſes (AC, FL,) vel eandem habentia, eam inter ſe rationem habent, quam altitudines (BO, IQ.) Fig. 1.

Fiant enim QS, OR æquales æqualibus baſibus FL, AC. Erunt igitur etiam QS, OR inter ſe æquales. Duc SI, RB. Si in triangulis OBR,

QIS

QIS accipiantur BO, IQ tanquam baſes, erunt OR, QS eorum altitudines, quæ cum ſint æquales, erunt triangula OBR, QIS inter ſe, ut *a* baſes BO, IQ. Sed quia ex conſtr. OR par eſt AC, & QS par FL, triangula OBR, QIS æquantur *b* triangulis ABC, FIL. Ergo etiam triangula ABC, FIL ſunt inter ſe, ut BO ad QI.

a Per 1. 1. 6.

b Per 38. l. 1.

PROPOSITIO II.

Fig. 4.

SI ad unum trianguli latus [BC] ducta fuerit [FL] parallela, hæc ſecabit proportionaliter latera [hoc eſt AF erit ad FB, ut AL ad LC.]

Et ſi recta [FL] ſecuerit latera [BA, CA] proportionaliter, erit ad reliquum latus [BC] parallela.

Pars 1. Ducantur BL, CF. Quoniam FL ponitur parallela BC, erunt triangula FBL, LCF eandem baſim FL habentia inter *a* ſe æqualia. Ergo triangulum X ad utrumque eandem *b* habet rationem, hoc eſt triangul. X eſt ad triang. FBL, ut triangul. idem X eſt ad triang. LCF. Sed triangulum X eſt ad triang. FBL, ut *c* AF ad FB, & triangulum X eſt ad triang. LCF, ut *d* AL ad LC. Ergo *o* etiam AF eſt ad FB, ut AL ad LC. Quod erat demonſtrandum.

a Per 37. l. 1.

b Per 7. l. 5.

c Per præc.

d Per eand.

o Per 11. l. 5.

Pars 2. Ut AF eſt ad FB, ita triangulum X *e* eſt ad triangulum FBL; & ut AL eſt ad LC, ita *f* triangulum X eſt ad triang. LCF. Sed jam ponitur AF ad FB, ut AL eſt ad LC. Ergo triang. X eſt *k* ad triang. FBL, ut idem X eſt ad LCF. Ergo *g* triangula FBL, LCF eandem habentia baſim æquantur. Ergo FL, BC *i* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

e Per præc.

f Per eand.

k Per 11. l. 5.

g Per 9. l. 5.

i Per 39. l. 1.

Co-

Corollarium.

SI ad unum trianguli latus (BC) ductæ fuerint plures parallelæ (IO, FL), erunt omnia laterum ſegmenta proportionalia. Fig. 5.

Ducatur FQ parallela AC. Rectæ FS, SQ æquantur *a* LO, OC. Sed BI eſt ad IF, ut *b* QS ad SF. Ergo etiam BI eſt ad IF, ut CO ad OL. *a* Per 34. l. 1. *b* Per 2. l. 6.

PROPOSITIO III.

SI recta [BF] angulum trianguli bifariam ſecans etiam ſecet baſim [AC], habebunt baſis ſegmenta [AF, FC] eandem proportionem, quam reliqua latera [AB, CB.] Fig. 6.

Et ſi baſeos partes [AF, FC] eandem rationem habuerint, quam reliqua latera [AB, BC], recta [BF] baſim ſecans, angulum oppoſitum [ABC] biſecabit.

Pars 1. Produc CB, donec BL ſit par BA, & junge AL. Quoniam in triangulo Z latera LB, AB æquantur, anguli *a* quoque L, & O æquales erunt. Quia igitur externus ABC duobus *b* internis L, O æqualis eſt; angulus I, qui per hyp. ipſius ABC dimidius eſt, æquabitur angulo L. Ergo AL, FB ſunt *c* parallelæ. Ergo in triangulo ACL, AF eſt ad FC, *d* ut LB (hoc eſt AB) ad BC. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 5. l. 1. *b* Per 32. l. 1. *c* Per 29. l. 1. *d* Per 2. l. 6.

Pars 2. Produc iterum CB, donec LB ſit par AB. Quoniam ponitur ut AF eſt ad FC, ita AB (hoc eſt LB) eſſe ad BC, erunt AL, FB *e* parallelæ. Ergo externus I eſt par *f* interno L, & alternus Q æqualis alterno *e* Per 2. l. 6. *f* Per 27. l. 1.

no O. Sed quia LB, AB æquales ſunt, anguli
a Per 5. l. 1. L, & O ſunt *a* æquales. Ergo etiam I, & Q æquales ſunt, biſectus ergo eſt ABC. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IV.

o Def. 1. l. 6. *Triangula ſibi mutuo æquiangula ſunt ſimilia; hoc eſt; o etiam latera æqualibus angulis oppoſita habent proportionalia.*

Fig. 7. In triangulis X, Z angulus A ſit par angulo F, & angulus C angulo L, & angulus B angulo I. Dico AB eſſe ad FI, ut AC ad FL; & AC eſſe ad FL, ut CB ad LI; & CB eſſe ad LI, ut BA ad IF.

Fig. 7. & 8. Dem. Si angulus F ponatur ſupra ſibi æqualem A, latera FI, FL cadent ſupra latera AB, AC.
s Fig. 8. ſola. Et quia *s* angulus externus AIL per hypoth. par
a Per 29. l. 1. eſt interno B, erunt *a* IL, BC parallelæ. Ergo
b Per 2. l. 6. *b* BI eſt ad IA, ut CL ad LA. Ergo *c* componendo BA eſt ad IF, ut CA ad LF. Quod ſi angulus
c Per 18. l. 5. L imponatur angulo C, eodem modo oſtendam, AC eſſe ad FL, ut BC ad IL: & ſi angulus I imponatur angulo B, oſtendetur pari modo, BC eſſe ad IL, ut AB ad FI. Liquet ergo propoſitum.

Corollaria.

Fig. 8. 1 Si in triangulo ducatur uni lateri (BC) parallela (LI), erit triangulum LFI ſimile toti CFB; ac proinde CF eſt ex LF, ut BC ad LI.
q Per 27. l. 1. Nam quia LI, BC parallelæ ſunt, erunt *q* externi FIL, FLI pares internis B, & C; F vero utrique triangulo eſt communis. Ergo ſunt æquiangula. Ergo latera CF, LF oppoſita æqualibus

libus angulis B, & FIL ſunt *r* proportionalia lateribus BC, IL, quæ opponuntur communi angulo F. *r* Per præc.

2 Si in triangulo parallelas AC, LO ſecet recta BF ab angulo oppoſito B ducta ſecabit eas proportionaliter. Fig. 9.

Nam per coroll. 1. AF eſt ad LI, ut FB ad IB; & FC quoque eſt ad IO, ut FB ad IB. Ergo AF eſt ad LI, ut *d* FC ad IO. Igitur permutando AF eſt ad FC, *e* ut LI ad IO. *d* Per 11. l. 5. *e* Per 16. l. 5.

PROPOSITIO V.

SI duo triangula habuerint omnia latera ſibi mutuo proportionalia, etiam ſibi mutuo æquiangula erunt. Fig. 10.

Hoc eſt, ſi AB ſit ad RF, ut AC ad RQ; & ut AC ad RQ, ſic CB ad QF; & ut CB ad QF, ſic AB ad RF; dico angulos antecedentibus oppoſitos æquari angulis, qui opponuntur conſequentibus. Nimirum C ipſi I, B ipſi F, A ipſi O.

Ang.	Antec.	Conſeq.	Ang.
C.	AB	RF	I
B	AC	RQ	F
A	CB	QF	O

Angulis A, & C fac æquales X, & Z, & latera coeant in N. Etiam igitur *b* B, & N æquales erunt. Quia ergo triangula P, T ſunt æquiangula, erit *c* AB ad RN, ut AC ad RQ. Sed ex hyp. etiam eſt AB ad RF, ſicut AC ad RQ. Ergo AB eſt ad RF, ut eadem AB ad RN. Ergo RN, RF *e* æquantur. Pari modo oſtendam *b* Per corol. 9. pr. 32. l. 1. *c* Per præc. *e* Per 9. l. 5.

dam æquari QN, & QF. Triangula igitur T, S ſibi mutuo ſunt æquilatera. Igitur anguli d Per 8. l. 1. I, F, O æquantur *d* angulis Z, N, X, hoc eſt per conſtr. angulis C, B, A. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VI.

Fig. 10. *SI duo triangula* [P, S] *habeant unum angulum* [A] *æqualem uni* [O], *& latera* [AB, AC, RF, RQ], *quæ æquales angulos continent, proportionalia, triangula erunt ſimilia.*

Angulis A, C fiant æquales X, Z, & latera e Per corol. 9. pr. 32. l. 1. coeant in N. igitur anguli quoque *e* B, & N æquales erunt. Oſtendam, ut in præcedenti, æquales eſſe RF, RN. Eſt vero RQ utriſque triangulis S, T communis. Anguli quoque O, & X æquales ſunt, quia æquantur ambo eidem A, X per conſtr. O per hyp. Ergo etiam I, & o Per 4. l. 1. F *o* æquantur ipſi Z, & N. Triangulum igitur S æquiangulum eſt triangulo T; hoc eſt per d Per 4. l. 6. conſtr. triangulo P. Ergo S, P *d* ſimilia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO VII.

VIx ullius eſt uſus.

PROPOSITIO VIII.

IN triangulo rectangulo perpendicularis [BC] *ab angulo recto in baſim ducta ſecat triangulum in partes toti, & inter ſe ſimiles.*

In

In triangulis ABF, & L angulus F communis eſt, anguli vero ABF, & X per hypotheſim ſunt recti, adeoque æquales. Ergo reliqui A, & O etiam *a* æquales erunt. Ergo *b* triangula ABF, & L ſimilia ſunt. Eodem modo ſimilia oſtendam eſſe triangula ABF, & R, angulumque I parem angulo F. Ex quo jam patet etiam R, & L ſimilia eſſe, cum æquales ſint anguli I, & F: O, & A: V, & X. Quod erat demonſtrandum. Fig. 11. *a* Per corol. 9. P. 32. l. 1. *b* Per 4. l. 6.

Corollaria.

PRimo BC eſt media proportionalis inter AC, CF. Cum enim ſint in triangulis R, & L.

æqu. ang.	I, F.	æqu. ang.	A, O
lat. opp.	AC, CB	lat. opp.	CB, CF.

Patet *c* AC eſſe ad CB, ut CB eſt ad CF. *c* Per 4. l. 6.

2 BF eſt media proportionalis inter AF, & CF. Item AB eſt media inter FA, & CA.

Nam in triangulis ABF, & L ſunt

æqu. ang.	ABF, X.	æqu. ang.	A, O.
lat. opp.	AF, BF.	lat. opp.	BF, CF.

Ergo AF eſt *d* ad BF, ut BF ad CF. Similiter, quia in triangulis ABF, & R ſunt *d* Per eand.

æqu. ang.	ABF, V	æqu. ang.	F, I.
lat. opp.	AF, AB	lat. opp.	AB, AC

Erit rurſum AF ad AB, ut AB ad AC.

PROPOSITIO IX.

Datam rectam (AB) dividere ſecundum datam proportionem (FI ad IL.) Fig. 11.

Ducatur infinita AZ, ex qua ſume AQ, QR æquales FI, IL. Ex R duc RB. Huic ex Q duc QC

parallelam. Dico factum.

Patet ex p. 2. l. 6.

PROPOSITIO X.

Fig. 13. *Datam rectam (AB) ſimiliter ſecare, ut altera data (AI) fuerit ſecta (in F, C.)*

Extremitates ſectæ, & inſectæ jungat recta IB. Huic ex punctis F, C duc parallelas rectæ ſecandæ AB occurrentes in L, & Q. Dico factum.

Patet ex corollario p. 2. lib. 6.

Scholium.

Fig. 13. *Ex hac propoſitione diſcemus rectam datam in quotvis æquales partes ſecare. Cum recta ſecanda AB faciat quemvis angulum recta quæpiam infinita; ex qua circino cape tot æquales partes AC, CF, FI, in quot ſecare placuerit AB. Duc rectam IB, eique parallelas FL, CQ. Dico factum.*

Fig. 14. *Aliter idem, & facilius efficiemus cum Maurolyco hunc in modum. Sit AB triſecanda. Duc ad AB parallelam IX infinitam ſupra, vel infra. Ex IX, ſi eſt infra AB, cape circino tres æquales partes IQ, QR, RS, quæ ſimul majores ſint quam AB, minores vero, ſi IX eſt ſupra. Per I, & A, item per S, & B duc rectas, quæ concurrant in C. Ex C ad Q, & R ducta recta datam AB triſecabunt. Demonſtratio patet ex corollar. 2. prop. 4.*

Fig. 15. *Rurſum cum Maurolyco aliter idipſum ita obtinebimus. Sit quatriſecanda AB. Duc infinitam AX, eique parallelam BZ etiam infinitam. Ex his cape circino partes æquales AL, LO, OQ; & BV,*

& BV, VS, SR in ſingulis nempe una pauciores, quam deſiderentur in AB, tum rectæ ducantur LR, OS, QV. Hæ quatriſecabunt datam AB.

Nam quia per conſtr. LO, RS parallelas, & æquales jungunt LR, & OS, etiam hæ erunt a *parallelæ. Pari modo OS, QV ſunt parallelæ. Ergo cum AQ ſit ſecta in tres æquales partes, etiam erit AI ſecta* b *in tres æquales. Similiter erit BC ſecta in tres æquales, tota igitur AB ſecta eſt in quatuor æquales.* a Per 33. 1.1. b Per coroll. p.2. 1.6.

Hæ duæ praxes ſunt faciliores Euclidæa, quia pauciores ducendæ ſunt parallelæ.

PROPOSITIO XI.

DAtis duabus rectis (AB, BC) tertiam proportionalem invenire. Fig. 16.

Duc rectam AC. Ex BA producta accipe AF parem BC. Per F ad AC duc parallelam FX infinitam, cui in L occurrat producta BC. Dico AB eſt ad BC, ut BC ad CL.

Nam AB eſt ad AF, *c* ut BC ad CL. Sed AF eſt *d* par BC. Ergo AB eſt ad BC, ut BC ad CL, adeoque CL eſt tertia proportionalis, quæ petebatur. c Per 2. 1.6. d Per conſt.

Aliter.

STatuantur AB, BC ad angulum rectum. Junge AC. Ex C duc CX perpendicularem ad AC infinitam, cui in L occurrat AB producta. Dico AB eſt ad BC, ut BC ad BL. Patet ex coroll. 1. prop. 8. *hujus*. Fig. 17.

Scholium.

POterit vero proportio data non ſolum per tres terminos, ſed etiam per infinitos continuari, & tota infinitorum proportionalium terminorum ſumma exhiberi. Pulcherrime hanc rem, totumque adeo Geometricæ progreſſionis negotium Gregorius a S. Vincentio proſecutus eſt toto libro 2. ſui operis. Nos in gratiam ſtudioſorum ſuccinctam rei propoſitæ conſtructionem, ac demonſtrationem hic exhibebimus.

Lemma 1.

Fig. 18. 2. *SI ratio minoris inæqualitatis LO ad LR ſemper continuetur, venietur ad quantitatem quavis data majorem.*

a Per Schol. p. 16. l. 5. *Sit LO ad LR, ut LR ad LQ, &c. Igitur* a *invertendo, ut QL ad RL, ſic RL ad OL. Ergo*
b Per 17. l. 5. *divid.* b *QR ad RL, ut RO ad OL; & permut.*
c Per 16. l. 5. c *QR ad RO, ut RL ad OL. Sed RL eſt major, quam OL. Ergo etiam QR major, quam RO. Pari modo oſtendam, IQ eſſe majorem, quam QR, & ſic deinceps. Quoniam igitur continuando rationem LO ad LR, ad primam LO ſemper accedunt partes OR, RQ, QI, &c. perpetuo creſcentes, patet veniri ad quantitatem quavis data majorem. Quod erat demonſtrandum.*

Lemma 2.

Fig. 18. utraq; *SI ratio quacunque majoris inæqualitatis AB ad CB ſemper continuetur, ad quantitatem venietur quavis data minorem.*

a Per 9. l. 6. *Data ſit LO quantumvis parva. Fiat* a *ut BC ad BA, ſic LO ad LR. Poterit* d *ratio LO ad LR*
d Per lem. 1. *toties continuari, ut aliquis terminus habeatur, puta LI major, quam AB. Quoties vero continua-*

ta

ta jam eſt ratio LO ad LR, per totidem terminos CB, EB, FB continuetur ratio AB ad CB, erit FB minor, quam OL.

Nam ex conſt. patet IL, QL, RL, OL eſſe proportionales ipſis AB, CB, EB, FB. Igitur ex aquo, ut e *IL ad OL, ſic AB ad FB; & permutando* f *ut IL ad AB, ſic OL ad FB. Sed IL eſt major,* g *quam AB. Ergo etiam data OL eſt major, quam FB. Quod erat demonſtrandum.* e Per 22. l. 5. f Per 16. l. 5. g Per conſt.

Problema.

Data ſit ratio minoris inæqualitatis AB ad BC. Oporteat hanc per infinitos terminos continuare, & omnium ſummam exhibere. Fig. 19.

Erigantur perpendiculares AL, BO æquales datis AB, BC, & per LO ducatur recta concurrens cum ABC producta in Z. Dico 1. *ſi ex C erigas perpendicularem CQ, erit CQ tertia proportionalis. QC transfer in CE, & ex E erige ER, erit hæc quarta. ER transfer in EF, & erige FS, erit hæc quinta; atque ita ratio AB ad BC, hoc eſt AL ad BO per terminos AL, BO, CQ, ER, FS, &c. ſive AB, BC, CE, EF, FI, &c. in infinitum continuabitur, quia quilibet terminus* [*ut FS*] *poterit auferri ex reſiduo FZ; cum enim LA (hoc eſt AB) ſit minor, quam AZ, etiam FS erit* b *minor, quam FZ.* b Pater ex corol. 1. p. 4. l. 6.

Dico 2. *AZ eſt æqualis toti ſummæ infinitarum proportionalium.*

1 *Pars, AZ eſt ad BZ, ut* c *AL ad BO; hoc eſt ut AB ad BC. Igitur permutando* o *AB eſt ad AZ, ut BC ad BZ. Ergo AZ eſt ad BZ,* d *ut BZ ad CZ. Sed ut AZ eſt ad BZ, ſic LA eſt ad OB, & ut BZ ad CZ, ita OB ad QC. Ergo* c Per id. corol. o Per 16. l. 5. d Per corol 2. pr. 18. l. 5.

 etiam

etiam LA eſt ad OB, ut OB ad QC. Eodem modo oſtendam OB eſſe ad QC, ut QC ad RE, & ſic deinceps in infinitum.

2. Pars. Tota ſumma infinitorum terminorum neque minor eſt quam AZ, neque major. Ergo æqualis. Non eſt major, quia, cum jam oſtenderim ſupra, QC eſſe minorem quam CZ, & RE, quam EZ, & SF quam FZ, & ſic deinceps ſine termino, poterunt omnes termini QC, RE, SF, &c. ſine fine conſtitui juxta invicem in recta AZ ſic, ut numquam punctum Z attingatur. Non erit etiam minor, quam AZ, quia jam oſtendi ſupra AZ, BZ, CZ eſſe continue proportionales, & eodem modo idem oſtenditur de reliquis EZ, FZ, &c. Cum igitur transferendo proportionales QC, ER, FS, &c. in CE, EF, FI, reſidua EZ, FZ, IZ, &c. ſemper ſint continue proportionales, ut jam oſtendimus, venietur tandem ad reſiduum e *dato minus, ac proinde ſumma proportionalium ſuperabit quantitatem omnem, quæ minor ſit, quam AZ, unde ipſa non poteſt eſſe minor, quam AZ. Quoniam igitur nec major eſt, nec minor, quam AZ, eidem æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.*

e Per lem. 2.

Theorema.

PRimorum terminorum differentia, primus terminus, & tota infinitarum proportionalium ſumma ſunt continue proportionales.

Fig. 19. *In ſuperiori figura ducatur OX parallela ad AZ. Igitur LX erit differentia primi termini AL, ſeu AB, & ſecundi BO, ſeu BC. Quoniam XO eſt parallela ad AZ, erit LX ad XO, ut* f *LA ad AZ. Sed XO eſt AB, & LA etiam eſt AB. Ergo LX differentia eſt ad AB primum termi-*

f Per coroll. 1. p. 4. l. 6.

minum, ut AB primus terminus ad AZ totam ſummam. Quod erat demonſtrandum.

Idem univerſaliter, & breviſſime demonſtrabitur in omni genere quantitatis hunc in modum. Sint continue proportionales quacumque [etiam numeri] AZ, BZ, CZ, &c. qua transferantur omnes in primam AZ. Erunt igitur AB, BC, CE, EF, &c. proportionalium differentia, qua una cum poſtrema quantitate IZ aquantur prima AZ. Quia vero, ſi proportionales in infinitum continuentur, poſtrema quantitas per lem. 2. evaneſcit, patet infinitarum proportionalium differentias aquari prima AZ. Deinde, quia eſt AZ ad BZ, ut BZ ad CZ, & ſic deinceps, erit dividendo AB ad BZ, ut BC ad CZ; & p convertendo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, ita BC ſecunda differentia ad BZ quantitatem ſecundam, & ſic deinceps. Ergo ut AB prima differentia ad AZ primam quantitatem, q ita omnes differentia (hoc eſt, ut jam oſtendi, prima quantitas AZ) ad omnes quantitates, hoc eſt ad totam ſummam infinitarum quantitatum. Quod erat demonſtrandum. Fig. 20.

p Per coról. 1. pr. 18. l. 5.

q Per 12. l. 5.

PROPOSITIO XII.

Datis tribus rectis (AB, BC, AF) quartam proportionem invenire.

Diſponantur datæ rectæ, ut figura monſtrat, & duc rectam BF, cui parallela fiat CZ infinita. Ipſi CZ occurrat AF producta in L. Fig. 21.

Dico AB eſt ad BC, ut AF ad FL, ut patet ex pr. 2. hujus. Ergo FL eſt quarta proportionalis quæſita.

Scholium.

P*Ulchre Bettinus noſter in ſuo Ærario Mathematicæ Philoſophiæ, ex 35. lib. 3. & 14. hujus, quæ ab hac non dependet, datis tribus quartam, & datis duabus tertiam proportionalem exhibet hunc in modum.*

Fig. 22. *Si tres dentur rectæ, ſecunda CB, & tertia BD ponantur in directum, quas prima BA tangat in B ſub quovis angulo. Per puncta C, A, D deſcribe* a Per 5. l. 4. a *circulum, cui AB prima occurrat in Z. BZ eſt quarta proportionalis.*

b Per 35. l. 3. *Cum enim rectangula ABZ, CBD* b *æqualia ſint, erit AB ad BC, ut BD ad BZ per 14. hujus, quæ ab hac, ut dixi, non dependet.*

Fig. 23. *Si dentur duæ rectæ AB, BC, ſecundæ BC apponatur in directum BD æqualis BC. Dein ipſam CB in B tangat prima AB ſub quovis angulo. Tum reliqua ut ſupra. Erit BZ tertia proportionalis quæſita.*

Demonſtratio ſimilis eſt; cum enim rectangula ABZ, CBD ſint æqualia, erit AB ad BC, ut BD (hoc eſt ut BC) ad BZ.

PROPOSITIO XIII.

Fig. 24. D*Atis duabus rectis (AC, CB) mediam proportionalem invenire.*

Tota compoſita AB biſecetur in O, & centro O deſcribatur circulus per A, & B. Ex C erige perpendicularem CF occurrentem peripheriæ in F.

Dico AC eſt ad CF, ut CF ad CB.

a Per 31. l. 3. Ducantur enim AF, BF; triangulum *a* AFB rectan-

rectangulum eſt, & a recto angulo ducta eſt perpendicularis FC in baſim. Ergo AC eſt ad CF, ut *b* CF ad CB. *b* Per corol. 1. p. 8. l. 6.

Corollarium.

Hinc patet, ſi ex quovis peripheriæ puncto (F) ducta ſit ad diametrum perpendicularis (FC), eam eſſe mediam proportionalem inter diametri ſegmenta (AC, CB.)

Scholium.

Hic locus omnino exigit, ut de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis etiam breviter dicamus aliquid in hujus problematis ſolutionem. Platonis hortatu omnes Græciæ Geometræ ſummo ſtudio incubuerunt. Ab Eutocio in comment. in Archimedem varii recenſentur ſubtiliſſimi modi, Platonis, Architæ Tarentini, Menechmi, Eratoſtenis, Philonis, Byſantii, Heronis, Apollonii Pergei, Nicomedis, Dioclis, Spori, Pappi, quibus alios deinde addiderunt Vernerus, P. Gregorius a S. Vincentio, Renatus Carteſius. Ex omnibus viſum eſt tres adferre reliquis faciliores.

Modus Platonis.

Oporteat inter datas AB, BC duas medias invenire.

Ponantur AB, BC ad rectum angulum, & producantur infinite verſus X, & Z. Accipiantur deinde duæ normæ (ita Claudius Richardus noſter; Plato enim unica norma utitur, ſed a cujus lateri DE inſerta ſit regula mobilis per DE) & unius normæ angulus D applicetur rectæ BX, ea lege, ut & latus unum tranſeat per A, & ad punctum E, in quo latus alterum ſecabit rectam BZ applicata norma ſecunda tranſeat per C. Dico BD, BE duas Fig. 25. *a* Vide Fig. 26.

eſſe

eſſe medias inter datas AB, BC, hoc eſt, ut AB eſt ad BD, ſic eſſe BD ad BE, & BE ad BC.

Demonſtratio patet ex coroll. 1. pr. 8. lib. 6. Nam ADE rectangulum triangulum eſt, & ab angulo recto in baſim perpendicularis cadit DB. Ergo per dictum coroll. ut AB ad BD, ſic BD ad BE. Et ob eandem cauſam ut BD ad BE, ſic BE ad BC. Inter datas igitur AB, BC reperta ſunt duæ media BD, BE. Quod erat faciendum. Hic modus inter omnes intellectu facillimus eſt.

Modus Philonis Byſantii.

Fig. 27.

DUæ datæ AB, BC jungantur ad rectum angulum; tum perficiatur rectangulum ABCD, & producantur DA, DC infinite, ducanturque diametri BD, AC ſe ſecantes in E. Centro E per B ducatur circulus, qui, quod angulus ABC rectus ſit, tranſibit b *per A, & C. Tum regula ſic applicetur ad punctum B, ut intercepta BG, OF ſint æquales. Dico AF, GC eſſe duas medias inter datas AB, BC; hoc eſt ut AB, BC; hoc eſt ut AB eſt ad AF, ſic AF eſſe ad GC, & GC ad CB.*

b Patet ex 31. l. 3.

Demonſtr. Quia GB, OF c *æquantur, etiam OG, BF æquales erunt. Ergo æqualia ſunt rectangula OGB, BFO, hoc eſt rectangula* d *DGC, DFA. Ergo eſt ut GD ad DF,* e *ſic reciproce AF ad GC. Sed GD eſt ad DF,* f *ut BA ad AF. Ergo ut BA eſt ad AF, ſic AF eſt ad GC. Rurſum quia jam oſtendi AF eſſe ad GC, ut BA eſt ad AF, eſt vero BA ad AF, ut GD ad DF, hoc eſt ut GC ad CB; erit quoque AF ad GC, ut GC eſt ad CB. Omnes igitur quatuor BA, AF, GC, CB ſunt continue proportionales, ac proinde inter datas AB, BC inventa ſunt duæ media. Quod erat faciendum.*

c Per conſt.

d Per corol. 1. p. 36. l. 3.

e Per 14. quæ ab hac non pendet.

f Per corol. 1. p. 4. l. 6.

Hi

Hi duo modi, quamvis ſint ingenioſi, & faciles, tamen, quia habita norma, & regulæ applicatio non niſi tentando fit, Geometrici non ſunt.

Modus Carteſii.

PAretur inſtrumentum hujuſmodi. Duæ regulæ aperiri poſſint, & claudi circa Y. His inſertæ ſint plures normæ inter ſe connexæ in B, C, D, E, F, G ea lege, ut dum regulæ YX, YZ aperiuntur, norma BC impellat normam CD in regula YZ, & norma CD impellat normam DE in regula YX, & DE impellat EF, & EF impellat FG, & ſic deinceps. Dum vero regulæ YX, & YZ clauduntur, omnia puncta B, C, D, E, F, G incidant in unum, idemque punctum A. Hoc inſtrumento inter duas datas non ſolum duæ, ſed etiam quatuor, & ſex, imo quotvis mediæ reperientur. Quod neque per ſectiones conicas, neque per modos ullos ab auctoribus ſupra dictis inventos obtineri poteſt. Fig. 28.

Pro duabus mediis opus eſt normis tribus, pro mediis 4 normis 5, & ſic deinceps.

Minor datarum transferatur in regulam YX, & ſit YB; major in regulam alteram YZ, & ſit YE. Applicetur norma prima ad punctum B, ibidemque firmetur, & aperiantur regulæ, donec norma tertia latus tranſeat per E. Dico YC, YD eſſe duas medias inter datas YB, YE, hoc eſt YB eſſe ad YC, ut YC eſt ad YD, & YD ad YE.

Demonſtratio manifeſta eſt ex corollar. 2. prop. 8. lib. 6. Nam ex natura inſtrumenti in trigono YCD angulus ad C rectus eſt, ab eoque cadit CD perpendicularis in baſim YD. Ergo per dictum coroll. ut YB eſt ad YC, ſic YC eſt ad YD. Rurſum, quia in trigono YDE angulus

ad

ad D rectus eſt, ab eoque cadit perpendicularis DC in baſim YE, erit ut YC ad YD, ſic YD ad YE. Sunt igitur YB, YC, YD, YE quatuor continue proportionales. Inter datas igitur YB, YE inventæ ſunt duæ mediæ YC, YD. Quod erat faciendum.

Si inter datas YB, YG petantur 4 mediæ, aperi regulas, donec norma quinta latus FG tranſeat per G. Erunt YC, YD, YE, YF quatuor mediæ inter YB, YG. Demonſtratio patet ex eod. coroll.

Hic modus, quamvis organum ſit Platonico illo operoſius, plane eximius eſt, tum quia nihil perficit tentando, tum quia ad 4, & 6, imo quotcunque medias ſe extendit.

Per duas medias perficitur problema Deliacum, cubi nimirum duplicatio, & corpora quæcunque in data proportione o augentur, vel minuuntur, quemadmodum idipſum in figuris planis efficitur p per unam mediam. Hanc viam primus aperuit Hippocrates, quam ut ſingularem, & unicam omnis Geometrarum poſteritas amplexa eſt.

o Vide ſchol. poſt 18. l. 12.
p Vide cor. 3. p. 20. l. 6.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 29. 30.

Parallelogramma æqualia (X, Z), quæ unum angulum (C) uni (O) habent æqualem, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca: (hoc eſt AC eſt ad CB, ut FO ad OL.)

Et, ſi latera ſic habent reciproca, parallelogramma ſunt æqualia.

1 Pars. IL, & SB productæ concurrant in Q. Parallelogrammum X eſt ad parall. R, ut AC *a* ad CB;

a Per 1. l. 6.

CB; & Z eſt ad *b* R, ut FO ad OL. Sed quia per hyp. X, & Z æqualia ſunt, X eſt *c* ad R, ut Z ad R. Ergo etiam AC eſt ad CB, *o* ut FO ad OL. Quod erat demonſtrandum. *b* Per eand. *c* Per 7. l. 5. *o* Per 11. l. 5.

Demonſt. 2. pars. Ut AC ad CB, ſic *d* X eſt ad R, & ut FO ad OL, ſic *e* Z ad R. Sed jam per hyp. AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Ergo X eſt ad R *o* ut Z eſt ad R. Ergo X, Z æqualia *q* ſunt. *d* Per 1. l. 6. *e* Per eand. *o* Per 11. l. 5. *q* Per 9. l. 5.

PROPOSITIO XV.

Æ Qualia triangula (ACL, FCB,) quæ unum angulum (C) uni (O) æqualem habent, etiam latera circa æquales angulos habent reciproca, hoc eſt AC eſt ad CB, ut FO ad OL. Fig. 31. 32.

Et ſi latera ſic habent reciproca, triangula ſunt æqualia.

Ducatur recta FB; reliqua demonſtratio eadem quæ præcedentis.

Corollarium.

TAm parallelogramma, quam triangula, quæ reciprocant baſes, & altitudines, ſunt æqualia. Et e converſo.

Patet ex duabus præcedentibus.

PROPOSITIO XVI.

SI quatuor recta (AB, FI, IL, BC) fuerint proportionales (hoc eſt ſi AB ſit ad FI, ut IL ad BC.) Rectangulum (X) ſub extremis (AB, BC) æquale eſt Fig. 33.

eſt rectangulo (Z) ſub mediis FI, IL.

Et ſi rectang. ſub extremis æquatur rectangulo ſub mediis, erunt illæ quatuor rectæ proportionales.

1 Pars. In rectangulis X, & Z circa rectos angulos, ac proinde æquales B, I per hyp. eſt AB ad FI, ut reciproce IL ad CB. Ergo *a* X, & Z æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. 1.6.

2. Pars. Quoniam X, & Z jam ponuntur æqualia. Ergo *b* circa æquales angulos B, & I eſt AB ad FI, ut reciproce IL ad BC. Quod erat demonſtrandum.

b Per eand.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 34.

SI tres rectæ (AB, FL, BC) fuerint proportionales, rectangulum ſub extremis (AB, BC) æquale erit quadrato mediæ (FL.)

Et ſi rectangulum ſub extremis æquatur quadrato mediæ, erunt tres illæ rectæ proportionales.

1 Pars. Mediæ FL accipiatur par O. Quoniam igitur per hyp. AB eſt ad FL, ut FL ad BC, eſtque O par FL. Erit quoque AB ad FL, ut O ad BC. Ergo *o* rectang. ſub extremis AB, BC æquatur rectangulo ſub mediis FL, & O, hoc eſt quadrato FL.

o Per præc.

2. Pars. Demonſtratur ſimiliter ex ſecunda parte præcedentis FC.

Corollarium.

Fig. 24.

EX hac, & ex 13. patet, ſi in circulo ſit FC perpendicularis diametro, rectangulum ACB æquale eſſe quadrato.

PRO-

PROPOSITIO XVIII.

Super data recta (RS) dato polygono (BQ) ſimile, ſimiliterque poſitum deſcribere. Fig. 35.

Polygonum datum B Q reſolve in triangula. Super data recta RS fac *a* angulos R, O æquales angulis B, A. Coibunt latera in X. Super XS fac angulos V, I æquales angulis T, C. Coibunt latera in Z. Dico factum. *a* Per 23. l. 1.

Nam quia anguli R, O æquantur angulis B, A, etiam E, *k* *b* æquales erunt: & quia etiam *c* V æquatur T, totus EV toti *k* T æqualis erit. Similiter, quia *d* ſinguli O, I æquantur ſingulis A, & C, toti OI, AC æquales erunt. Et quia *e* V, & I æquantur T, & C, etiam Z, & Q æquales *f* ſunt. Polygona igitur RZ, BQ ſibi mutuo æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut oſtendatur etiam latera eſſe proportionalia. RS eſt ad BF, *g* ut SX ad FL; & rurſum SX eſt ad FL, *h* ut SZ ad FQ. Ergo ex æquo *i* RS eſt ad SZ, ut BF ad FQ. &c. *b* Per corol. 9. *c* Per conſtr. *d* Per conſtr. *e* Per conſtr. *f* Per corol. 9. p. 32. l. 1. *g* Per 4. l. 6. *h* Per eand. *i* Per 22. l. 5.

PROPOSITIO XIX.

Triangulorum (X, Z) ſimilium proportio eſt duplicata proportionis laterum (AC, FI) æqualibus angulis ſubtenſorum. Fig. 36. 37.

Hoc eſt; ſi *a* fiat, ut AC ad FI, ſic FI ad tertiam AQ, triang. X eſt ad triang. Z, ut AC prima ad tertiam proportionalem AQ. Vide defin. 10. 5. *a* Per 11. l. 6.

Quoniam triangula X, Z ſunt ſimilia, erit BA ad LI

b Per 4. 1. 6. LI, *b* ut AC ad IF. Sed per conſtr. ut AC ad IF, ſic IF ad AQ. Ergo etiam BA eſt ad LI, *c* ut IF ad AQ. Ergo in triangulis QBA, & Z latera circa angulos A, I, qui per defin. triangulorum ſimilium æquales exiſtunt, ſunt reciproca. Æquantur igitur *d* QBA, & Z. Atqui triangulum X ad QBA eſt, ut *e* baſis AC ad baſim AQ. Ergo etiam X eſt ad Z, ut AC ad AQ. Quod erat demonſtrandum.

c Per 11. 1. 5.
d Per 15. 1. 6.
e Per 1. 1. 6.

PROPOSITIO XX.

Fig. 38. *Similia polygona (ABCDE, FGHIK) dividuntur (1) in ſimilia triangula (P, S, & Q, T, & R, V) numero æqualia: (2) & totis proportionalia; (3) & polygonorum proportio duplicata eſt proportionis laterum (AB, FG) inter æquales angulos (B, G, & BAE, GFK) exiſtentium.*

1 Pars. Quoniam polygona ſunt ſimilia, erunt *a* ſibi mutuo æquiangula, eruntque bini binis æquales anguli BAE, GFK, & B, G, & BCD, GHI, & CDE, HIk, & Ek. Quia igitur AB eſt ad BC, *b* ut FG ad GH, angulique B, & G æquales ſunt, ſimilia *c* ſunt triangula P, S. Similiter demonſtrabitur, ſimilia eſſe R, & V. Deinde quia toti BCD GHI, & ablati BCA, CHF æquales ſunt, etiam reliqui ACD, FHI æquales erunt. Eodem modo oſtendam æquari ADC, FIH. Ergo *d* tertius CAD tertio HFI æqualis eſt. Quare *e* etiam Q, & T triangula ſimilia ſunt. Liquet ergo 1. Pars.

a Per defin. 1. 1. 6.
b Per eand.
c Per 6. 1. 6.
d Per corol 9. p. 32. 1. 1.
e Per 4. 1. 6.

Pars 2. Quoniam ſimilia ſunt P, & S, ratio P ad S duplicata eſt *f* rationis CA ad HF. Sed ob eandem cauſam etiam ratio Q ad T duplicata eſt rationis CA ad HF. Ergo P eſt ad S, ut *g* Q ad T.

f Per præced.
g Per 34. 1. 5.

Eo-

Eodem modo oſtendam ut Q eſt ad T, ita R eſſe ad V. Ergo ut *i* unum antecedens P eſt ad unum conſequens S, ita omnia antecedentia P, Q, R ſimul ſumpta, ad omnia conſequentia S, T, V ſimul ſumpta, hoc eſt polygonum ad polygonum. Quod erat demonſtrandum. *i* Per 12. l. 5.

3 Pars. Ratio P ad S eſt *k* duplicata rationis AB ad FG. Sed ratio polygoni ad polygonum eſt eadem cum ratione P ad S, ut jam oſtendi. Ergo etiam ratio polygoni ad polygonum eſt duplicata rationis AB ad FG. Quod erat tertium. *k* Per præc.

Corollaria.

1 Omnes figuræ ordinatæ, ſeu regulares, ut æquilatera triangula, quadrata, pentagona, &c. ſunt inter ſe in ratione duplicata laterum. Omnes enim ordinatæ ſunt ſimiles inter ſe, ut patet ex defin. 1. 6.

2 *Si* figurarum quarumvis ſimilium latera AB, FG inter æquales angulos poſita ſint nota, etiam proportio figurarum innoteſcet. Sit ex. gr. AB 2. ped. & FG 6 pedum, fiat ut 2 ad 6, ita 6 ad alium numerum, nempe 18. Figura minor eſt ad majorem, ut 2 ad 18, ſeu ut 1 ad 9. Invenitur autem tertius proportionalis numerus, ſi ſecundus datorum multiplicetur per ſeipſum, & productus per primum dividatur. Fig. 38.

3 Ex eadem propoſitione elicitur methodus præclara, figuram quamvis rectilineam augendi, vel minuendi in ratione data; ut ſi velim pentagoni, cujus latus eſt AB, aliud facere quintuplum: inter terminos rationis datæ AB, BC inveni *m* mediam proportionalem BX: ſuper hac conſtrue *n* pentagonum ſimile dato. Hoc erit quintuplum dati. Fig. 39. *m* Per 13. l. 6. *n* Per 18. l. 6.

M Nam

Nam per 20 pentagonum AB eſt ad ſibi ſimile BX, ut AB prima ad BC tertiam.

Porro, cum etiam circulorum proportio ſit duplicata proportionis diametrorum (ut oſtendetur p. 2. l. 12.,) hæc praxis ad circulos quoque pertinebit.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 40. *Figuræ (A, B) quæ eidem (C) ſimiles ſunt, etiam ſibi mutuo ſimiles ſunt.*

Patet ex defin. 1. lib. 6. ex axiom. 2. lib. 1. & propoſit. 11. lib. 5.

PROPOSITIO XXII.

Fig. 40. & 41. *Si quatuor, aut plures rectæ (FI, LQ, & OR, SV) proportionales fuerint, figuræ ſimiles, ſimiliterque ab iis deſcriptæ (A, B, &, E, K) proportionales erunt:*

Et e converſo.

Demonſtratio primæ partis patet ex 34. 5. Quoniam enim *a* rationes A ad B, & E ad k ſunt duplicatæ rationum FI ad LQ, & OR ad SV ex hyp. æqualium, etiam ipſæ æquales erunt.

a Per 19. & 20. l. 6.

Pars 2. patet ex 35. lib. 5.

Digitized by Google

PROPOSITIO XXIII.

ÆQuiangula parallelogramma (X, Z) inter ſe rationem habent compoſitam ex rationibus laterum (AC ad CB, & LC ad CF.) Fig. 42.

Hoc eſt, fiat CB ad O, ut LC ad CF, X eſt ad Z, ut AC ad O. Vide quæ demonſtravimus l. 5. parte 3. num. 13.

Concurrant IL, SB in Q. Parallelogrammum X eſt *b* ad parallelogrammum R, ut AC ad CB; & R eſt ad Z, *c* ut LC ad CF (hoc eſt, ut CB ad O.) Ergo *d* ex æquo X eſt ad Z, ut AC ad O. Quod erat demonſtrandum. *b* Per 1. l. 6. *c* Per eand. *d* Per 22. l. 5.

Corollaria.

HInc, & ex 34. lib. 1. patet primo, Triangula, quæ unum angulum ad C æqualem habent, rationem habere compoſitam ex rationibus rectarum AC ad CB, & LC ad CF æqualem angulum continentium. Fig. 42.

Patet 2. rectangula, ac proinde & parallelogramma quæcunque rationem inter ſe habere compoſitam ex rationibus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem. Neque aliter de triangulis ratiocinaberis.

Patet 3. Quo modo triangulorum, ac parallelogrammorum proportio exhiberi poſſit. Sunto parallelogramma X, & Z, & eorum baſes AC, CB, altitudines CL, CF, fiat *e* ut CL altitudo ad altitudinem CF, ita baſium altera CB ad O. Parallelogrammum X eſt ad parallelogram. Z, ut AC eſt ad O. Fig. 42. *e* Per 12. l. 6.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 45. *IN omni parallelogrammo (SF,) quæ circa (AB) diametrum ſunt parallelogramma (CL, OI, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.*

Per 27. 1. æquales ſunt anguli C, S, & L, F. Per eandem E eſt par I, hoc eſt per eandem ipſi A; B vero & toti SF, & parti CL communis eſt. Igitur totum SF, & pars CL æquiangula ſunt. Reliquum eſt, ut etiam latera æqualibus angulis oppoſita habeant proportionalia.

Quoniam in triangulis BCE, BSA, eſt CE parallela ad SA, erit *c* BC ad CE, ut BS ad SA; & CE eſt ad EB, ut *e* SA ad AB. Quia vero in triangulis quoque ELB, AFB, EL eſt parallela ad AF, erit EB ad EL, ut *i* AB ad AF. Ergo ex æquo *f* CE eſt ad EL, ut SA ad AF. Igitur *l* CL, & totum SF ſimilia ſunt. Eodem modo oſtendam OI eſſe ſimile toti *SF*. Ergo *n* CL, & OI ſunt etiam ſimilia inter ſe. Quæ erant demonſtranda.

c Per corol. 1. p. 4. l. 6.
e Per corol. 1. p. 4. l. 6.
i Per id. corol.
f Per 22. l. 5.
l Per def. 1. l. 6.
n Per 21. l. 6.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 46. *POlygonum datum (A) in aliud dato (B) ſimile tranſmutare.*

Sive polygonum conſtituere æquale dato A, & ſimile alteri dato B.

Super CF latere polygoni B, cui ſimile petitur, fac rectangulum Q *a* æquale B. Deinde ſuper FS fac *b* rectangulum R æquale A. Manifeſtum eſt CF, & FI eſſe in directum. Inter

a Per 45. l. 1.
b Per eand.

CF

CF, FI inveni *c* mediam proportionalem FL. Super hac fac *d* polygonum ſimile dato B, erit hoc etiam æquale dato A. *c* Per 13. l. 6. *d* Per 18. l. 1.

Nam cum per conſtr. ſint tres proportionales CF, FL, FI, polygonum B eſt ad ſimile ſibi polygonum ſuper FL factum, *e* ut CF ad FI; hoc eſt *i* ut Q ad R. Igitur permutando ut polygonum B eſt ad Q, ita polygonum ſuper FL eſt ad R. Sed per conſtr. polygonum B æquatur Q. Ergo etiam polygonum ſuper FL ſimile ipſi B æquatur R, hoc eſt per conſtruct. dato A. Factum eſt igitur, quod petebatur. *e* Per 20. l. 6. & def. 10. l. 5. *i* Per 6. l. 6.

PROPOSITIO XXVI.

Parallelogramma ſimilia (BD, FN) habentia angulum communem (A) circa eandem diametrum exiſtunt. Fig. 44.

Duc rectas AE, CE, ſi negas AEC eſſe diametrum communem parallelogrammorum BD, & FN, ipſius BD diameter eſto recta alia AGC ſecans FE in G, & duc parallelam GH. Parallelogramma igitur FH, BD exiſtent circa communem diametrum AGC, ac proinde *a* erunt ſimilia. Ergo ut BA ad AD, *b* ſic FA ad AH. Sed etiam ut BA ad AD, ſic FA ad AN, cum BD, FN ſimilia ſint per hyp. Ergo FA eſt ad AH, ut FA ad AN. Quod eſt abſurdum. *a* Per 24. l. 6. *b* Per def. 1. l. 6.

PROPOSITIO 27.28.29.

Tronibus faceſſunt negotium, & nullius fere ſunt uſus.

PROPOSITIO XXX.

Fig. 45. *Datam rectam (AB) ita ſecare, ut tota (AB) ſit ad unum ſegmentum (AC,) ſicut idem ſegmentum eſt ad reliquum (CB)*

Hoc eſt (ut loquuntur Geometræ) lineam extrema, ac media ratione ſecare.

Per 11. 2. ita ſeca AB in C, ut rectangulum ſub AB, CB ſit æquale quadrato AC. Dico factum.

Erit enim per 17. ut AB ad AC, ſic AC ad CB.

Hujus ſectionis vis admirabilis eſt in corporum regularium inſcriptione, & comparatione.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 47. *SI a lateribus trianguli rectanguli (ACB) figura ſimiles quæcunque deſcribantur, erit ea, quæ opponitur recto angulo, duabus ſimul reliquis (L, R) æqualis.*

a Per corol. 2. p. 8. l. 6.
b Per 20. l. 6. & per def. 10. l. 5.
c Per corol. 2. p. 8. l. 6.

Propoſitio igitur 47. lib. 1. hic redditur univerſalis.

Ab angulo recto C demittatur perpendicularis CO. Quoniam AB, BC, BO ſunt *a* tres proportionales, erit F ad ſibi ſimilem R, *b* ut AB prima ad BO tertiam. Rurſum, quoniam *c* BA, AC,

AC, AO ſunt proportionales, erit F ad ſibi ſimilem L, ut *d* BA prima ad AO tertiam. Quia igitur eſt F ad R, ut AB ad BO, & F ad L, ut AB ad AO, erit quoque F ad R, & L ſimul ſumptas, ut *e* AB ad BO, AO ſimul ſumptas. Sed AB duabus BO, AO æqualis eſt. Ergo etiam F duabus R, & L æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

d Per 20. lib. 6. & defi. 10. l. 5.

e Per 24. l. 5.

Corollarium.

Ex hac propoſitione facile dabitur quotcunque figuris ſimilibus rectilineis quibuſcunque una omnibus æqualis, & ſimilis, eadem prorſus methodo, qua prop. 1. ſcholii poſt 47. l. 1. exhibetur datis quotlibet quadratis unum æquale. In demonſtratione tantum pro 47. l. 1. citetur 31. l. 6.

PROPOSITIO XXXII.

V*Ix habet uſum, nec quidquam habet notabile.*

PROPOSITIO XXXIII.

I*N æqualibus circulis, vel eodem anguli ſive ad centra (ut ABC, FOD,) ſive ad peripheriam (ut ARC, FSD) eam inter ſe rationem habent, quam arcus (AKC, FGD,) quibus inſiſtunt. Idem intellige de ſectoribus.* Fig. 48.

Quod attinet ad angulos centri, & ſectores, demonſtrabitur eodem prorſus modo, quo prop. 1. hujus libri demonſtratum eſt, triangula æque alta eſſe ut baſes. Tantum ubi iſthic citatur prop. 38. l. 1. hic citetur 29. l. 3.

Quoniam vero ad peripheriam anguli R, & S dimidii *a* ſunt angulorum ad centrum C A B, FOD, quod de his oſtenſum eſt, liquebit etiam de illis.

a Per 20. l.3.

Corollaria.

Fig. 49. 1 Angulus centri (BAC) eſt ad quatuor rectos, ut arcus BC, cui inſiſtit, ad totam circumferentiam.

Nam ut BAC ad rectum BAF, ita per hanc 33 arcus BC ad quadrantem BF. Ergo angulus BAC eſt ad 4 rectos, ut arcus BC eſt ad 4 quadrantes, hoc eſt ad totam peripheriam.

2 Inæqualium circulorum arcus IL, BC, qui æquales ſubtendunt angulos ſive ad centra, ut IAL, & BAC, ſive ad peripheriam, ſunt ſimiles.

Nam arcus IL eſt ad ſuam peripheriam, *b* ut angulus IAL, hoc eſt, ut BAC ad 4 rectos, & arcus BC eſt ad ſuam peripheriam, *c* ut idem angulus BAC ad 4 rectos. Ergo IL eſt ad ſuam peripheriam, ut BC ad ſuam. Ergo *d* ſunt ſimiles arcus IL, & BC.

b Per corol.1.
c Per id. corol.
d Per defin.4.l.6.

3 Duæ ſemidiametri (AB, AC) a concentricis peripheriis arcus auferunt ſimiles IL, BC. Patet ex coroll. 2.

4 Segmenta (BkC, IOL,) quæ angulos capiunt æquales (kO) ſimilia ſunt.

Nam per coroll. 2. arcus BC, IL, ac proinde etiam arcus BkC, IOL ſimiles ſunt.

ELE-

ELEMENTORUM

GEOMETRIÆ

LIBER UNDECIMUS,

Nobis Septimus.

SEx libris primis ſubjungit Euclides elementa numerorum tribus ſequentibus ſeptimo, octavo, & nono comprehenſa, quibus etiam decimum de quantitatibus incommenſurabilibus adjungit. Nos a planis immediate tranſimus ad ſolida; de numeris ſeorſum tractaturi. Id, opinor, diſcentibus commodius erit, ſi elementa Geometriæ nulla alia tractatione interrupta ſimul omnia habeantur. Nihilominus cum citabimus propoſitiones hujus, & ſequentis libri, eos non Septimum, & Octavum, ſed Undecimum, & Duodecimum appellabimus, ne, ſi ab ordine Euclidæo ubique recepto diſcedamus, propoſitionum citatio implicatior reddatur.

Hic liber duas quodammodo partes complectitur. In prima jaciuntur fundamenta, quibus ſolidorum, hoc eſt, corporum doctrina univerſa nititur. Altera parallelepipedorum affectiones proponuntur.

DEFINITIONES.

1 SOlidum, ſive corpus eſt, quod longitudinem, latitudinem, & profunditatem habet.

2 Solidi

2 Solidi extremum eſt ſuperficies.

Fig. 1. I. II. 3. Linea recta (AB) eſt ad planum (CC) recta, ſive perpendicularis, cum ad rectas omnes lineas (CA) in plano (CC) ductas, a quibus illa tangitur, angulos rectos facit (BAC, BAC.)

Fig. 2. 4 Planum ad planum rectum, ſive perpendiculare eſt, cum omnes rectæ lineæ (L Q,) quæ communi planorum ſectioni (XR) perpendiculares ducuntur in planorum uno, rectæ ſunt alteri plano (ABCO.)

Fig. 3. 5 Si recta linea (OL) plano inſiſtat non ad rectos angulos, & a ſublimi ejus puncto (L) ad planum ducatur perpendicularis LP, jungaturque PO, angulus LOP dicitur inclinatio lineæ OL ad planum.

Fig. 4. 6 Si planum (RE) plano (LQ) non inſiſtat perpendiculariter, alterius ad alterum inclinatio eſt acutus angulus (ABC,) qui continetur a rectis lineis (AB, & BC,) quæ in utroque plano ad communem ſectionem (OE) ducuntur perpendiculares.

7 Planum ad planum ſimiliter inclinatum dicitur, atque alterum ad alterum; quando dicti inclinationum anguli ſunt æquales.

8 Parallela plana ſunt, quæ in omnem partem producta æqualibus ſemper intervallis diſtant.

9 Similes figuræ ſolidæ rectilineæ ſunt, quæ ſimilibus planis continentur multitudine æqualibus.

Fig. 5. 10 Angulus ſolidus rectilineus eſt, qui pluribus, quam duobus planis angulis (BAC, CAO, OAB) non in eodem exiſtentibus plano, ſed ad unum punctum conſtitutis continetur.

11 Æquales ſolidi anguli ſunt, qui intra invicem poſiti congruunt.

Quemadmodum angulus planus eſt inclinatio linearum,

rum, ita ſolidus angulus eſt inclinatio ſuperficierum. De utroque igitur eodem modo ratiocinandum erit. Conſule ſcholium poſt prop. 16. *l.* 3.

12 Prima eſt figura ſolida planis comprehenſa, quorum adverſa duo (OFE, ACB) ſunt parallela, æqualia, & ſimilia. Fig. 6. 7. 8.

13 Parallelepipedum eſt ſolidum ſex quadrilateris ex adverſo parallelis comprehenſum. Fig. 8.

14 Si ſex plana ex adverſo parallela ſint quadrata, ſolidum iis comprehenſum Cubus erit.

PROPOSITIO PRIMA.

Recta lineæ pars una (AC) nequit eſſe in ſubjecto plano (OE,) altera (CB) extra planum. Fig. 9.

Per ſe clarum eſt ex definitione plani, & lineæ rectæ, vide defin. 7. & 4. l. 1.

PROPOSITIO II.

Omne triangulum in uno eſt plano. Et duæ rectæ ſe mutuo ſecantes in eodem plano ſunt. Fig. 10.

Prima pars per ſe clara eſt, cum triangulum nihil ſit aliud, quam plana ſuperficies tribus rectis comprehenſa. Ex quo etiam patet pars altera.

PROPOSITIO III.

Si duo plana (AB, CD) ſe mutuo ſecant, (EF) communis eorum ſectio eſt recta linea. Fig. 11.

Patet

Patet ex definitione plani. Licebit tamen ſic demonſtrare, ſi EF ſectio communis non eſt recta linea, ducatur in plano CD recta EOF, & in plano BA recta EQF. Duæ igitur rectæ EOF, EQF claudent ſpatium. Quod eſt abſurdum.

PROPOSITIO IV.

Fig.12. *SI recta (BA) duabus rectis (CAX, FAS) ſe mutuo ſecantibus perpendicularis exiſtat, etiam plano per ipſas ducto perpendicularis erit.*

Si negas, alia recta BQ plano rectarum AC, AF ſit perpendicularis. Junge AQ, & huic in plano FAC duc perpendicularem QO. Hæc producta neceſſario ſecabit *o* aliquam rectarum CAX, FAS, vel utramque ubicumque tandem fuerit punctum Q. Secet ergo CAX in O, jungaturque BO. Quoniam ergo angulus BAO per hyp. rectus eſt.

o Colligitur ex ſchol. poſt 31. l. 1.

erit quad. BO. Æ. *a* quad. BA,) quad. AO.)

a Per 47. l. 1.

ſed quia BQ ponitur recta plano FAC, ac proinde *b* rectum facit cum AQ angulum BQA, eſt quad. BA *c* Æ. quad. BQ) quad. AQ)

b Per defin. 3. l. 11.
c Per 47. l. 1.

Et quia angulus AQO per conſtr. rectus eſt, quad. AO Æ. *o* quad. OQ) quad. AQ)

o Per eand.

Ergo quad. BO. Æ. quad. BQ) quad. OQ) quad. AQ bis)

Ergo quad. BO majus eſt BQ, & OQ, ac proinde *d* angulus BQO rectus non eſt. Ergo BQ

d Patet ex ead.

BQ non eſt recta *e* plano CAF. Liquet ergo quæſitum. *e Patet ex defi. 3. l. 11.*

Scholium.

EX eo, quod ponebatur BQ eſſe recta plano FAC, directe eſt demonſtratum, BQ non eſſe rectam plano FAC; ac proinde ex eo, quod negaretur aſſertio theorematis, eadem aſſertio directe probata eſt. Hæc demonſtratio quoad ſubſtantiam eſt Joannis Ciermans.

PROPOSITIO V.

SI tres rectæ (BA, CA, FA) eidem rectæ (AR) ad idem punctum (A) ſint perpendiculares, tres illæ erunt in uno plano. Fig. 13.

Sit enim, ſi fieri poteſt, earum una BA in alio plano RO, quod ſecet LQ planum duarum reliquarum CA, FA recta AO. Quoniam RA per hyp. perpendiculariter inſiſtit duabus CA, FA, plano LQ recta *a* erit. Ergo cum AO rectum facit *b* angulum RAO. Sed etiam ex hyp. angulus RAB rectus eſt. Ergo anguli RAB, & RAO æquales ſunt. Quod eſt abſurdum. *a Per præc. b Per defi. 3. l. 11.*

PROPOSITIO VI.

LIneæ rectæ (AB, CD,) quæ eidem plano (EF) ſunt perpendiculares, inter ſe ſunt parallelæ. Fig. 14.

Poſtulari poterat ut per ſe notum; licebit tamen ſic demonſtrare.

Juncta BD, fac in plano FE lineam DG norma-

lem

lem ad BD, & parem BA, junganturque DA, GA, GB. Rectæ BD, DG æquantur *a* BD, BA; & anguli BDG, *b* DBA ſunt recti. Ergo AD, BG *c* ſunt æquales. Igitur triangula ABG, GDA ſibi mutuo æquilatera ſunt, ac proinde anguli ABG, ADG æquales. Sed ABG *e* rectus eſt. Quare & ADG rectus. Sunt vero & BDG ex conſtr. & CDG ex definit. 3. recti. Ergo GD ad tres CD, AD, BD recta eſt. Ergo CD cum AC, BD eſt in uno *i* plano; ſed etiam AB cum AD, BD *o* in uno plano eſt. Ergo AB, CD ſunt in uno plano. Ergo cum anguli ABD, CDB ſint *p* recti, erunt AB, CD, *q* parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per conſtr. *b* Per defi.3.l.11. *c* Per 4. l.1. *e* Per defi.3.l.11. *i* Per præc. *o* Per 2. l.11. *p* Per defi.3.l.11. *q* Per 29. lib. 1. & def. 36. l. 1.

PROPOSITIO VII.

Fig. 15. R*Ecta (EF) ſecans rectas (AB, CD) poſitas in eodem plano in uno eſt cum ipſis plano.*

Poſtulari poterat. Qui volet ſic demonſtret.

Planum rectarum AB, CD ſecet aliud planum per puncta E, F; ſi jam EF non eſt in plano A B, CD non erit EF communis ſectio. Sit ergo EGF. Ergo EGF *a* eſt linea recta. Duæ igitur rectæ EF, EGF concludunt ſpatium. Quod eſt abſurdum.

a Per 3. l. 11.

Corollarium.

HInc ſequitur, ſi EF ſecat parallelas AB, CD, in eodem eſſe cum ipſis plano; omnes enim parallelæ *b* ſunt in uno plano.

b Per defi.36.l.1.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

SI parallelarum (AB, CD) una (AB) plano (EF) ſit recta, etiam altera (CD) eidem plano erit recta. Fig. 14.

Poterat poſtulari. Si demonſtratio quæritur fere ſimilis ea eſt demonſtrationi propoſitionis 6.

PROPOSITIO IX.

REcta (AB, EF,) quæ ſunt eidem rectæ (CD) parallelæ, licet non eodem cum illa plano, etiam ſunt inter ſe parallelæ. Fig. 16.

Quamvis poſtulari poſſet, licebit tamen ſic demonſtrare.

In plano parallelarum AB, CD duc Gk normalem ad CD. Item in plano parallelarum EF, CD duc Hk normalem ad CD. Ergo *a* Ck recta eſt plano GkH. Ergo cum AG, EH ſint parallelæ ad Ck, erunt AG, EH *b* rectæ plano GkH. Ergo AG, EH *c* ſunt parallelæ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 4. l. 11.
b Per 8. l. 11.
c Per 6. l. 11.

PROPOSITIO X.

SI duæ rectæ (AC, BC) ſint parallelæ duabus rectis DF, EF, licet non ſint in eodem plano, æquales angulos (C, & F) comprehendunt. Fig. 17.

Fiant CA, CB æquales FD, FE, & ducantur DE, AB, DA, FC, EB. Cum AC, FD ſint

a Per 33. l. 1. ſint parallelæ, & æquales, etiam AD, CF *a* parallelæ ſunt, & æquales. Similiter oſtendam BE, CF eſſe parallelas, & æquales. Ergo etiam AD, BE ſunt *b* parallelæ, & *c* æquales. Æquantur *d* ergo AB, DE. Cum igitur triangula BAC, EDF ſibi mutuo ſint æquilatera, anguli C, & F *e* æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

b Per præc. c Per axio. 1. d Per 33. l. 1. e Per 8. l. 1.

PROPOSITIO XI.

Fig. 18. AD planum datum (*AB*) a dato extra illud puncto (*C*) perpendicularem ducere.

Conſtr. In plano AB duc quamvis DF, ad quam ex C perpendicularem deſcribe CE. Ad eandem per E in plano AB perpendicularem duc AEM. Tum ad AM ex C perpendicularem demitte CG. Dico CG plano AB rectam eſſe.

Per G ponatur HG parallela ad DF.

Per conſtr. DE recta eſt ad CE, & EM. Ergo DE recta *a* eſt plano CEM: adeoque & *b* HG. Ergo *c* CG recta eſt ad HG. Sed CG ex conſtr. recta eſt ad EM. Ergo CG *d* recta eſt plano AB. Quod erat propoſitum.

a Per 4. l. 11. b Per 8. l. 11. c Per defin. 3. l. 11. d Per 4. l. 11.

PROPOSITIO XII.

Fig. 19. EX dato plani (*EF*) puncto (*A*) rectam ad datum planum erigere.

A quovis extra planum EF puncto D fac DB ad planum *a* EF rectam, junctaque BA duc AC parallelam DB. Dico factum. Demonſtratio patet ex 8.

a Per præc.

Scho-

Scholium.

Practice per datum punctum perpendicularis ducitur dato plano, ſi norma OKN ad datum punctum applicetur.

PROPOSITIO XIII.

Lineæ ex eodem puncto ductæ (DC, EC) nequeunt ambæ ad idem planum (AB) eſſe rectæ. Fig. 20.

Alias enim per 6. forent parallelæ, quod fieri non poteſt.

PROPOSITIO XIV.

Si eadem recta (AB) ad duo plana (FG, LQ) perpendicularis eſt, plana erunt parallela. Fig. 21.

Sumatur in planorum alterutro FG quodvis punctum C, ex quo ducatur CE parallela ad AB occurrens plano LQ in E. Erit CE etiam *a* recta plano utrique FG, LQ. Quare ſi jungantur rectæ AC, BE, erunt anguli A, B *b* recti. Ergo AC, BE ſunt *c* parallelæ. Ergo ACEB parallelogrammum eſt; ac proinde CE, quam jam oſtendi utrique plano eſſe perpendicularem, æquatur *d* AB. Eodem modo oſtendam, omnes utrique plano perpendiculares eſſe æquales. Ergo plana *e* ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

a Per 8. l. 11.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 29. l. 1.
d Per 34. l. 1.
e Per defi. 8. l. 11.

PROPOSITIO XV.

Si rectæ duæ ſe mutuo tangentes (BA, CA) ad duas alias ſe mutuo tangentes (ED, FD) ſint parallelæ, etiam plana per ipſas ducta erunt parallela. Fig. 22.

Ex A ducatur AG recta ad planum EF, ponanturque GH, GI parallelæ ad DE, DF. Erunt hæ *a* parallelæ etiam ad AB, AC. Cum igitur anguli IGA, HGA ſint *b* recti, erunt etiam *c* CAG, BAG recti. Ergo GA, quæ ad planum EF eſt recta, etiam recta *d* eſt plano BC. Ergo plana *e* BC, EF ſunt parallela. Quod erat demonſtrandum.

a Per 9. l. 11. *b* Per def. 3. l. 11. *c* Per 27. l. 1. *d* Per 4. l. 11. *e* Per præc.

PROPOSITIO XVI.

Fig. 23. *Planum (EHFG) ſecans parallela plana (AB, CD) in iis facit ſectiones (EH, GF) parallelas.*

Si non: cum ſint in eodem plano ſecante, convenient *o* alicubi in I. Quare cum totæ HEI, FGI ſint *a* in planis AB, CD productis, etiam hæc convenient in I. Quod eſt abſurdum contra definitionem 8. hujus.

o Per ſchol. poſt 31. l. 1. *a* Per 1. l. 11.

PROPOSITIO XVII.

Fig. 24. *Parallela plana rectas lineas (BD, & HG) proportionaliter ſecant.*

Ducantur in planis PQ, TV rectæ BH, DG, item BG occurrens plano RS in F, junganturque FC, FI. Planum trianguli BGD ſecans parallela plana facit ſectiones CF, DG *a* parallelas. Ergo eſt BC ad CD, ut *b* BF ad FG. Rurſum triangulum BHG ſecans parallela plana facit ſectiones *c* BH, FI parallelas. Ergo eſt HI ad IG, ut *d* BF ad FG; hoc eſt (quod jam oſtendi) ut BC ad CD. Quod erat demonſtrandum.

a Per præced. *b* Per 2. l. 6. *c* Per præc. *d* Per 2. l. 6.

PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea (FE) ſit ad planum (AB) recta, omnia, quæ per ipſam ducuntur, plana ſunt eidem plano (AB) recta. Fig. 15.

Ductum ſit per FE planum aliquod GC faciens cum AB ſectionem CD. In hoc ducantur HK normales ad CD ſectionem communem. Cum igitur etiam *o* FE recta ſit ad CD, erunt KH *a* parallelæ ad FE. Sed FE ponitur recta plano AB. Ergo & HK rectæ *b* ſunt plano AD. Ergo GC planum *c* plano AB rectum eſt.

o Per hyp. & def. 3. l. 11.
a Per 29. l. 1.
b Per 8. l. 11.
c Per def. 4. l. 11.

PROPOSITIO XIX.

SI duo plana (MF, GD) ſe ſecantia ſint ambo recta eidem plano (AB); erit etiam communis illorum ſectio (KL) recta plano (AB.) Fig. 16.

Quoniam planum MF ponitur rectum plano AB, ex def. 4. patet ex puncto L poſſe in plano MF duci rectam perpendicularem plano AB, eam nempe, quæ ex L eſſet in plano MF perpendicularis ad communem ſectionem EF. Similiter, quia planum GD ponitur perpendiculare ad AB, ex def. 4. patet in plano GD poſſe duci ex puncto L perpendicularem plano AB. Sed ex puncto L tantum *a* una poteſt duci perpendicularis plano AB. Ergo neceſſe eſt, ut recta, quæ ex L perpendicularis eſt plano AB, exiſtat in utroque plano MF, & GD, ac proinde ſit ipſa planorum MF, & GD communis ſectio LK. Quod erat demonſtrandum.

a Per 13. l. 11.

PROPOSITIO XX.

Fig. 27. *SI angulus ſolidus (A) tribus planis angulis (BAC, CAD, DAB) continetur, horum duo quilibet reliquo ſunt majores .*

Si tres plani ſunt æquales, patet aſſertio: ſi inæquales, maximus eſto BAD. Hic nihilominus minor eſt duobus reliquis . Ex maximo enim BAD abſcinde BAE parem BAC , fiantque æquales AC , AE . Per E ducatur recta occurrens ipſis AB, AD in B, & D , junganturque BC, DC. Quoniam anguli *o* B A E , BAC æquales ſunt, & latera BA, AE æqualia lateribus B A, A C, etiam baſes B E, BC æquales *a* erunt. Quoniam vero BC, CD *b* majores ſunt, quam BD , ablatis æqualibus BE , B C, remanet CD major, quam ED. Sed latera EA, AD æquantur lateribus *c* CA, AD . Ergo angulus *d* CAD major eſt, quam EAD. Cum igitur BAC par ſit oſtenſus B A E , erunt duo ſimul B A C, CAD majores toto B A D . Quod erat demonſtrandum.

o Per conſt.
a Per 4.l.1.
b Per 20. l. 1.
c Per conſt.
d Per 25. l.1.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 28. *PLani anguli ſolidum angulum quemcunque componentes quatuor rectis ſunt minores.*

Eſto ſolidus angulus A : planis angulis illum componentibus ſubtendantur rectæ BC, CD, DE, EF, FB in uno plano exiſtentes. Quo facto conſtituitur pyramis, cujus baſis eſt polygonum BC DEF, vertex A, totque cincta triangulis G, H, I, K,

I, K, L, quot plani anguli componunt ſolidum A. Jam vero quia duo anguli ABF, ABC *a* majores ſunt uno FBC; & duo ACB, ACD majores uno BCD, & ſic deinceps; erunt triangulorum G, H, I, K, L, circa baſim anguli ſimul ſumpti omnibus ſimul angulis baſeos B, C, D, E, F majores. Sed anguli baſeos una cum quatuor rectis faciunt bis tot rectos, *b* quot ſunt latera, ſive quot triangula. Ergo omnes triangulorum circa baſim anguli una cum quatuor rectis conficiunt amplius, quam bis tot rectos, quot ſunt triangula. Sed iidem anguli circa baſim una cum angulis, qui componunt ſolidum, componunt bis *c* tot rectos, quot ſunt triangula. Liquet ergo angulos ſolidum angulum A componentes quatuor rectis eſſe minores. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc.

b Per theor. 2. ſchol. poſt 32. l. 1.

c Patet ex 32. l. 1.

Corollarium.

EX hac, & præcedenti ſatis colligitur, ex tribus angulis planis quatuor rectis minoribus, quorum duo quilibet reliquo ſint majores, ſolidum angulum conſtitui poſſe.

Scholium.

EX hac eadem propoſitione demonſtratur celebre theorema: tres tantum figuræ planæ ordinatæ, & æquales corpus continere poſſunt; nimirum æquilatera triangula vel 4, vel 8, vel 20. Quadrata 6, Pentagona 12. Ac proinde quinque tantum ſunt ordinata, ſeu regularia corpora. Pyramis, ſeu Tetraedrum, quod 4, Octoedrum, quod 8, Icoſaedrum, quod 20 æquilateris triangulis continetur, Cubus, qui 6 quadratis, Dodecaedrum, quod 12 æqualibus pentagonis ordinatis comprehenditur. Porro corpus ordinatum dicetur, quod planis ordinatis, & æqualibus continetur.

Demonſtrat. Ex duobus æquilateris triangulis non

poteſt conſtitui angulus ſolidus, ad hoc enim ſaltem requiruntur tres.

A tribus triangulis æquilateris in unum punctum coeuntibus poteſt conſtitui angulus ſolidus pyramidis; ex quatuor angulus ſolidus Octaedri; ex quinque angulus ſolidus Icoſaedri, cum æquilateri trianguli anguli tum 3, *tum* 4, *tum* 5 *ſint* 4 *rectis minores, ut colligitur ex Corollario* 12. *propoſ.* 32. *lib.* 1.

b Colligitur ex cor.pr. 11.l.4. *Quoniam vero tres anguli pentagonici* b *ſunt* 4 *rectis minores, poterunt tria pentagona in unum punctum coeuntia conſtituere ſolidum angulum, nempe Dodecaedri.*

A tribus quadratis in unum punctum coeuntibus effici ſolidum angulum cubi, per ſe patet. Atque ita quinque exſurgunt regularia corpora.

Præter hac nulla eſſe alia ſic oſtenditur.

Sex anguli trianguli æquilateri conficiunt 4 *rectos; unus enim facit duas* e *tertias recti; ac proinde ſex tales efficient* 12 *tertias recti, hoc eſt rectos* 4. *Ergo a ſex æquilateris triangulis non poterit effici ſolidus angulus, multo minus a pluribus.*

e Per corol.12.p. 32.l.1.

A quatuor quadratis non poſſe conſtitui ſolidum angulum, ac multo minus a pluribus per ſe patet.

Anguli pentagonici 4 *ſunt* 4 *rectis majores; ſinguli enim efficiunt* 6 *quintas* e *recti. Ergo a quatuor pentagonis nequit fieri angulus ſolidus, multo minus a pluribus.*

e Per corol.p.11. l.4.

Nec ſane ex aliis figuris quibuslibet ordinatis conſtitui poterit ſolidus angulus. Tres anguli hexagonici f *ſunt* 4 *rectis æquales; unus enim facit* 4 *tertias recti, ac proinde tres faciunt* 12 *tertias recti, hoc eſt* 4 *rectos. Ergo ex tribus hexagonis nequit*

f Per corol.2.pr. 15.l.4.

nequit conſtitui ſolidus angulus, multo minus a pluribus.

Cum vero tres anguli hexagonici ſint 4 rectis æquales, tres anguli figurarum quarumlibet hexagono majorum, ut ſeptagoni, octogoni, &c. 4 rectis majores erunt. Quare manifeſtum eſt reliquas figuras ordinatas omnes eſſe ineptas, ut ſolidum angulum conſtituant, adeoque præter jam dicta 5 nulla ordinata corpora dari poſſe.

PROPOSITIO XXII. XXIII.

ADmodum prolixa ſunt, ac moleſta tyronibus; & fere uſu non veniunt.

PROPOSITIO XXIV.

PLana parallelepipedum continentia (1) ſunt parallelogramma, (2) quæ ex adverſo, ſunt ſimilia, & (3) æqualia. Fig. 29.

1. Pars. Planum AF ſecans plana BD, FH ex defin. 13. parallela facit *a* ſectiones BA, FE parallelas. Rurſum planum AF ſecans plana AH, BG per defin. 13. parallela facit *b* ſectiones AE, BF parallelas. Ergo BFEA parallelogrammum eſt. Simili argumento reliqua parallelepipedi plana ſunt parallelogramma.

a Per 16. 1.11.

b Per eand.

2 Pars. Quoniam ex prima parte patet, AB, BC parallelas eſſe EF, FG, erunt *c* anguli ABC, EFG pares. Quare, cum & latera alternis ſint paria, ſimilia ſunt parallelogramma adverſa BD, FH. Eodem modo probatur de ceteris oppoſitis.

c Per 10.1.11.

Pars 3. patet ex prima parte, & 4. vel 8. 1.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 30. *SI parallelepipedum, (GFDI) aut quodvis priſma plano (NP) ſecetur adverſis planis parallelo, erit ut baſis (DCPO) ad baſim (OPFE) ita ſolidum (GP) ad ſolidum (NF.)*

Demonſtrabitur eodem modo, quo 1. 6.

Corollarium.

Priſma ſectum plano adverſis planis parallelo ſectionem habet ſimilem, & æqualem planis adverſis.

PROPOSITIO XXVI. & XXVII.

NOn ſunt neceſſaria.

PROPOSITIO XXVIII.

Fig. 29. *PLanum per adverſorum planorum diametros (AC, EG) tranſiens parallelepipedum ſecat in duo æqualia priſmata.*

a Per 24.l.11. *b* Per 9. l.11. *c* Per 7. l.11.

Quoniam *a* BG, BE ſunt parallelogramma, CG, AE æquidiſtant eidem BF. Ergo & *b* inter ſe ſunt parallelæ, ac proinde in uno ſunt plano. Ergo rectæ AC, EG *c* in uno ſunt plano. Jam vero planum per illas ductum ſecare parallelepipedum in duo priſmata æqualia, ſic oſtendo. Intelligatur priſma A E G C D H ſupra planum ſuum EACG ita conſtitui, ut anguli D, H vergant ad angulos B, F. Manifeſtum eſt tum adhuc fore inter parallela plana BADC, FEHG. Tum vero neceſſe eſt, ut D cadat in B, &

H in

H in F. Cadat enim D extra B, ſi fieri poteſt, in N, Angulus BAC æquatur *d* angulo DCA. Sed DCA æquatur NAC (eſt enim unus, idemque angulus.) Ergo BAC, & NAC æquales ſunt, quod eſt abſurdum. Ergo D incidit in B, & pari de cauſa H in F. Ergo priſma AEGCDH congruit priſmati ACGEFB, ac proinde *e* æqualia ſunt.

d Per 27. l. 1.

e Per axiom. 7. l. 1.

PROPOSITIO XXIX. & XXX.

Parallelepipeda (FEAGKIMC, & FEBHLOMI,) quæ eandem habent baſim (EFIM,) & altitudinem eandem, ac proinde exiſtunt inter parallela plana (EFIM, GAOL,) æqualia ſunt. Fig. 31.

Vel enim exiſtunt inter lateralia parallela plana EAOM, & FGLI, vel non. Eſto primum. Ex 24. hujus, & 8. l. 1. patet triangula AEB, CMO; item GFH, KIL ſibi mutuo æquilatera, & æquiangula eſſe. Quare, ut in præcedenti, oſtendam priſmata CMOLIK, BEAHFG ſibi mutuo impoſita congruere, ac proinde *a* æqualia eſſe. Quare, addito communi ſolido FEBHKCMI, tota parallelepipeda FEAGKIMC, FEBHLOMI æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per axi. 7. l. 1.

Sit deinde parallelepipedum FXQEMIPR non inter eadem lateralia plana parallela exiſtens cum parallelepipedo FEAGKCMI. Quoniam ex hypotheſi GK, AC, RP, QX ſunt in uno plano ad baſim EFIM parallelo, RP, QX ſecent GK in L, & H; AC vero in O, & B, junganturque EB, MO, FH, IL: facile oſtenſu eſt, plana ſolidum FEBHLOMI continentia paral- Fig. 32.

lelo-

lelogramma eſſe ex adverſo æquidiſtantia, adeoque ſolidum illud *c* eſſe parallelepipedum. Sed huic per primam partem parallelepipeda FXQEMIPR, & FEAGKCMI ſunt æqualia. Ergo etiam ſunt æqualia inter ſe. Quod erat dem.

c Per defin. 13. l. 11.

Scholium.

HÆc propoſitio ſimilis eſt propoſitioni 35. l. 1. affirmat enim de ſolidis, quod illa de planis. Quare ſimilis etiam erit reliquorum caſuum demonſtratio.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 33. *Parallelepipeda ſuper æqualibus baſibus (AO, & EG,) & in eadem altitudine (S) ſunt æqualia.*

Habeant parallelepipeda primo latera ad baſes normalia. Ad latus FG productum fiat parallelogrammum GMKH æquale, ac ſimile parallelogrammo AO, perfectoque parallelogrammo GMPR, rectæ PM, RG occurrant ipſi KH in Q, & L. Jam vero intelligantur ſuper GK, GQ, GP conſtitui parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta, altitudo autem omnium communis ſit S. Solidum EGS eſt ad ſolidum GPS, ut EG *b* ad GP; hoc eſt (quia EG, AO per hyp. æquantur) ut AO ad GP; hoc eſt per conſtr. ut GK ad GP; hoc eſt ut *c* GQ ad GP; hoc eſt *d* ut ſolidum GQS eſt ad idem ſolidum GPS. Quoniam igitur ſolida EGS, & GQS eandem habent rationem ad ſolidum GPS, erit ſolidum EGS *e* æquale GQS; hoc eſt ſolido *f* GKS; hoc eſt (quia baſes GK, AO ſunt *g* æquales, & ſimiles) ſolido

b Per 25. l. 11.
c Per 35. l. 1.
d Per 25. l. 11.
e Per 9. l. 5.
f Per 29. l. 11.
g Per conſt.

ſolido *i* AOS. Quod erat propoſitum. *Per totum diſcurſum ſolida accipiuntur recta.* *i* Patet ex 29. l. 11. imo per ſe.

Habeant deinde parallelepipeda data EGS AOS latera ad baſes EG, & AO obliqua. Fiant ſuper EG, AO parallelepipeda, quorum latera ſint ad baſes recta in altitudine S; hæc æqualia erunt obliquis per 29. aut 30 l. 11. Quare cum parallelepipeda recta per primam partem ſint paria inter ſe, erunt & obliqua æqualia. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXII.

Parallelepipeda quævis æque alta ſunt inter ſe ut baſes. Fig. 34.

Baſes ſint GO, & A; ſuper CO fac parallelogrammum OE par ipſi A.

Super BC, OE intelligantur erigi parallelepipeda in altitudine K: hæ igitur partes erunt unius parallelepipedi BEK. Ergo *a* parallelepipedum OEK eſt ad parallelepipedum BCK ut baſis OE ad baſim BC; hoc *b* eſt, ut baſis A ad baſim BC. Sed quia baſes OE, & A ſunt æquales, parallelepipeda OEK, & AK *c* æqualia ſunt. Ergo etiam parallelepipedum AK eſt ad parallelepipedum BCK, ut baſis A ad baſim BC. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 25. l. 11. *b* Per conſt. *c* Per præc.

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, demonſtrabitur in l. 12. *de pyramidibus prop.* 6; *de quibuslibet priſmatis in corollario* 1. *poſt p.* 9; *de conis, & cylindris prop.* 11.

PRO-

PROPOSITIO XXXIII.

Fig. 35. *Similia parallelepipeda (HA, & CM) ſunt in triplicata ratione laterum homologorum (AB, BC.)*

Sint parallelepipeda AH , CM ſimilia . Ergo omnia ipſorum plana ſimilia *a* ſunt; adeoque AB ad BC *b* eſt, ut EB ad BO; & ut FB ad BG, ſic EB ad BO. Inſuper & anguli *c* planorum æquales ſunt. Collocentur ſic igitur ſolida AH, CM, ut æquales anguli CBO, ABE ſint oppoſiti, & latera AB, CB in directum; tum vero etiam *d* EB, OB in directum erunt. Cogitentur jam ſuper planis BQ, & EC facta ſolida ſic, ut ſolida KB, HA ſint unum parallelepipedum, & KB, PO faciant unum ſimiliter parallelepipedum, & PO, CM unum quoque parallelepipedum conficiant. Solidum HA eſt ad ſolidum KB, *e* ut AE ad BR, hoc eſt ut *f* AB ad BC, hoc eſt (ut per hyp. oſtendi ſupra) ut EB ad BO; hoc eſt, ut *g* EC ad BQ, hoc eſt ut ſolidum *i* idem KB ad ſolidum PO. Continuant ergo eandem rationem tria ſolida HA, KB, PO. Jam vero ſolidum KB eſt ad ſolidum PO, ut *k* baſis BR ad baſim BQ; hoc eſt, ut *l* EB ad BO; hoc eſt, ut *m* FB ad BG, hoc eſt, *n* ut planum FC ad planum BS; hoc eſt, ut idem *o* rurſus ſolidum PO ad CM ſolidum. Quatuor ergo ſolida HA, KB, PO, CM ſunt continue proportionalia. Ergo ratio primi HA ad quartum CM eſt *p* triplicata rationis primi HA ad KB ſecundum; hoc eſt, rationis *q* AE ad BR; hoc eſt, *r* rationis homologorum laterum AB ad BC. Quod erat demonſtrandum.

a Per def. 9. l. 11. *b* Per def. 1. l. 6. *c* Per eand. *d* Patet ex 15. l. 1. *e* Per 25. l. 11. *f* Per 1. l. 6. *g* Per eand. *i* Per 25. l. 11. *k* Per eand. *l* Per 1. l. 6. *m* Oſtendi ſup. ex hyp. *n* Per 1. l. 6. *o* Per 25. l. 11. *p* Per def. 10. l. 5. *q* Per 25. l. 11. *r* Per 1. l. 6.

Scho-

Scholium.

Quod hic de parallelepipedis oſtenſum eſt, in libro 12. *demonſtrabitur de pyramidibus propoſ.* 8; *de quibuslibet priſmatibus coroll.* 2. *poſt p.* 9. *de conis, & cylindris p.* 12; *de ſphæris p.* 18.

PROPOSITIO XXXIV.

Si parallelepipeda æqualia ſunt (*BM*, *CK*,) *reciprocant baſes, & altitudines; hoc eſt, baſis AM eſt ad baſim FK, ut reciproce altitudo FC ad altitudinem AB.* Fig. 36.

Et ſi reciprocant baſes, & altitudines, æqualia ſunt.

1. Pars. Sint primo latera ad baſes recta. Si jam ſolidorum BM, CK altitudines ſint pares, res patet.

Si altitudines ſint inæquales, a majori FC abſcinde FE parem BA, & per E duc planum EL ad FK parallelum. Baſis AM eſt ad baſim FK, ut ſolidum *b* BM ad ſolidum EK; hoc eſt (quod ex hyp. paria ſint ſolida BM, CK) ut ſolidum CK ad EK ſolidum; hoc eſt, ut *c* CG ad EG; hoc eſt, ut *d* CF ad EF; hoc eſt ex conſtr. ut CF reciproce ad BA. Quod erat demonſtrandum. *b* Per 32. 1.11. *c* Per 25. 1.11. *d* Per 1. 1.6.

Sint deinde latera ad baſes obliqua. Erigantur ſuper iiſdem baſibus in altitudine eadem parallelepipeda recta. Erunt his obliqua *e* parallelepipeda æqualia. Quare cum hæc per 1. partem reciprocent baſes, & altitudines, etiam illa reciprocabunt. Quod erat demonſtrandum. *e* Per 29. & 30. l. 11.

2. Pars. Sint altitudines inæquales, lateraque

ad

ad baſes recta, & ex majori CF ipſi BA ſume
f Per 32. l.11. parem EF. Solidum BM eſt ad ſolidum EK, ut f AM ad FK; hoc eſt ex hyp. ut CF ad BA, hoc
g Per 1. l.6. eſt ex conſtr. ut CF ad EF; hoc eſt, ut g CG ad
i Per 25. l.11. EG; hoc eſt, ut ſolidum i CK ad ſolidum idem EK. Ergo ſolida BM, & CK eandem habent rationem ad EK. Ergo ſunt paria. Quod erat demonſtrandum.

Corollaria.

QUæ de parallelepipedis demonſtrata ſunt Prop. 29. 30. 31. 32. 33. 34. etiam conveniunt priſmatis triangularibus, quæ ſunt dimidia parallelepipeda, ut patet ex p. 28. Igitur

Fig. 37. 1. Priſmata triangularia æque alta ſunt ut baſes, A, B.

2. Si ſimilia fuerint, eorum proportio triplicata eſt proportionis laterum æqualibus angulis oppoſitorum.

3 Si æqualia ſunt, reciprocant baſes, & altitudines: & ſi reciprocant baſes, & altitudines, æqualia ſunt.

Scholium.

QUod hic propoſ. 34. oſtenſum eſt de parallelepipedis, demonſtrabitur in lib. 12. de pyramidibus p. 9; de priſmatis quibuſcunque coroll. 3. poſt p. 9; de conis, & cylindris p. 15.

PROPOSITIO XXXV.

VAlde prolixa ſervit ſequenti, quam ſine illa demonſtrabimus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Parallelepipedum (DH) ex tribus rectis proportionalibus (A, B, C) factum æquatur parallelepipedo (IN) facto a media (B,) & æquiangulo priori. Fig. 38.

Parallelepipedi DH baſis FD habeat latus EF æquale A, & latus alterum ED æquale C, latus vero EG baſi inſiſtens æquale mediæ B. Erit parallelepipedum DH factum ex tribus rectis A, B, D, parallelepipedi deinde IN tria latera LX, IX, XM (ac proinde omnia reliqua) ſint æqualia mediæ B, & angulus ſolidus X ſit æqualis angulo ſolido E. Erit parallelepipedum IN factum ex media B, & priori æquiangulum. Dico etiam eſſe æquale.

Cum enim per hyp. & conſtr. ſit ut FE ad LX, ita reciproce IX ad DE. Erunt *a* baſes DF, IL æquales. Jam quia anguli ſolidi ad E, & X, ſunt æquales, ſi ponantur intra invicem, *b* congruent, & ob æqualitatem rectarum EG, XM puncta M, G coincident. Quare una erit utriuſque ſolidi altitudo, perpendicularis nempe a punctis M, G jam congruentibus in planum baſeos demiſſa. Solida *c* igitur DH, IN æqualia ſunt. Quod erat demonſtrandum.

a Per 14. l.6.

b Per def. 11. l. 11.

c Per 31. l.11.

Scholium.

Hic porro obſervabimus, id quod magnum habet uſum, ex tribus lineis quomodocumque inter ſe ductis ejuſdem magnitudinis ſolidum gigni.

A B C. C A B. B C A.
1 2 3

In ſchemate hic appoſito duæ primæ litteræ deſignant baſim, tertia altitudinem. Comparemus primum cum ſecundo.

Baſis AB eſt ad baſim CA per 1. 6. *ut B latus ad C latus; hoc eſt reciproce ut B altitudo ad C altitudinem. Ergo per* 34. *hujus lib.*

ABC. Æ. CAB.

Eodem modo oſtendes primum tertio, & tertium ſecundo eſſe æqualia.

PROPOSITIO XXXVII.

PArallelepipeda ſimilia, ſimiliterque a lineis proportionalibus deſcripta etiam ipſa ſunt proportionalia; & e converſo.

Patet ex 34. lib. 5. Rationes enim parallelepipedorum per 33. hujus erunt triplicatæ rationum ex hyp. æqualium, quas habent lineæ.

Converſa patet ex 35. lib. 5.

Propoſitio vera eſt de quibuſcunque ſimilibus corporibus, quæ patebit lib. 12. triplicatam habere laterum rationem.

PROPOSITIO 38. & 39.

NIhil continent memorabile, & vix ullius ſunt uſus.

PRO-

PROPOSITIO XL.

SI fuerint duo priſmata triangularia æqualis altitudinis (ABFGOC, & IKLPXQ), quorum unum baſim habeat parallelogrammam (OB) duplam baſeos alterius (IKL), quæ triangula ſit, priſmata erunt æqualia. Fig. 39. & 40.

Nam ſi perficiantur parallelepipeda kR, & CH, erunt hæc æqualia *a* ob baſium CA, Mk, & altitudinum æqualitatem. Ergo etiam priſmata ipſorum *b* dimidia æqualia erunt. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 31. l. 11. *b* Per 28. l. 11.

Scholium.

EX hactenus demonſtratis habetur dimenſio priſmatum triangularium, & quadrangularium, ſeu parallelepipedorum, ſi nimirum altitudo ducatur in baſim, ut ſi altitudo ſit 10 *pedum, baſis vero pedum quadratorum* 100, (*menſurabitur autem baſis per ſchol. pr.* 36. *vel* 41. *lib.* 1.) *multiplica* 10 *per* 100, *proveniunt* 1000 *pedes cubici pro ſoliditate priſmatis dati.*

Demonſtratio facilis eſt. Nam quemadmodum rectangulum, ita & parallelepipedum rectum producitur ex altitudine ducta in baſim. Ergo etiam quodvis parallelepipedum producitur ex altitudine in baſim ducta, cum per 31 *æquale ſit parallelepipedo recto ſuper eadem baſi ad eandem altitudinem conſtituto.*

Deinde, cum totum parallelepipedum producatur ex altitudine in totam baſim, ſemiſſis parallelepipedi (hoc eſt priſma triangulare per 28.) *producetur ex altitudine ducta in dimidiam baſim, triangulum nempe ILK.*

ELEMENTORUM
GEOMETRIÆ
LIBER DUODECIMUS,

Nobis Octavus.

QUod in Libris præcedentibus hactenus præſtare conati ſumus, ut Mathematum elementa ad faciliorem, ac breviorem methodum revocaremus, id in primis præſtandum erit in hoc Libro duodecimo, cujus doctrina cum maxime ſit neceſſaria, demonſtrationes adeo ſunt prolixæ, ut tyrones in deſperationem plerumque conjiciant. Huic incommodo ita mederi propoſitum nobis eſt, ut tamen a rigore Geometricæ demonſtrationis non recedamus. Quod utrum ſimus aſſecuti, lector intelliget, ſi hac noſtra cum Euclidæa prolixitate contulerit.

DEFINITIONES.

Fig. 1. l. 12. 1 PYramis eſt ſolidum (ZL) triangulis (ALC, CLF, FLB, BLA) comprehenſum ab uno plano (Z) ad unum punctum L conſtitutis.

Planum Z Baſis dicitur, & eſſe poteſt vel triangulum, vel quadrangulum, vel quævis alia figura, ex cujus lateribus ſingulis triangula ſurgunt in unum punctum L, quod vertex dicitur, coeuntibus.

Ut

Ut triangulum inter rectilineas figuras planas, ita pyramis inter ſolidas prima, & ſimpliciſſima eſt.

2 Si extra planum alicujus circuli (CL) acceptum fuerit punctum (A,) ab eoque ducatur recta infinita (AF) tangens circulum in C, quæ puncto (A) manente fixo circa peripheriam circuli convertatur, donec in eum locum (A C F) redeat, unde moveri cœperat, ſuperficies a recta linea (ACF) deſcripta dicitur conica ſuperficies; corpus vero, quod hac ſuperficie, & circulo (CL) continetur, conus vocatur. Fig. 1. 1.

Vertex coni eſt A.

Baſis coni eſt circulus CL.

Axis coni eſt recta (AB) ex vertice ad baſeos centrum ducta.

Latus coni eſt recta (AC(a vertice ad baſeos circumferentiam ducta, quam eſſe totam in coni ſuperficie, ex ejus geneſi eſt manifeſtum.

Conus rectus eſt, cum axis (AB) eſt baſi rectus. Fig. 2.

Conus ſcalenus, ſeu obliquus eſt, cum axis (AB) non eſt ad baſim rectus. Fig. 3.

Fit etiam conus rectus a triangulo rectangulo (CBA) circa unum latus perpendiculare (AB) in orbem ducto. Fig. 2.

3 Si circa duos circulos æquales, & parallelos (CL, OQ) recta linea infinita (COF) convertatur, donec in locum redeat, unde moveri cœpit, ſic ut mota ſibi ipſi ſemper parallela maneat, ſuperficies a recta (COF) deſcripta dicitur cylindrica ſuperficies; corpus vero, quod hac ſuperficie, & binis circulis continetur, cylindrus vocatur. Fig. 4. 5.

Baſes cylindri ſint circuli (CL, OQ.)

Axis cylindri eſt recta (A B) baſium centra connectens.

Fig. 4. Latus cylindri eſt recta (OC) in cylindri ſuperficie utramque baſim tangens.

Fig. 5. Rectus cylindrus eſt, cum axis ad baſes rectus eſt.

Fig. 4. Scalenus cylindrus dicitur, cum axis ad baſes non eſt rectus.

Fit etiam cylindrus rectus a rectangulo (OCBA) circa unum latus (BA) in orbem ducto.

Fig. 20. & 21. 4 Similes coni, & cylindri ſunt, quorum axes (Ak, ZO,) & baſium diametri (BF, QR) ſunt proportionales.

5 Sphæra eſt ſolidum comprehenſum una ſuperficie, ad quam omnes rectæ lineæ a quodam puncto intra ipſam poſito ductæ ſunt æquales.

Punctum illud centrum dicitur.

Sphæræ diameter eſt recta per centrum ducta ad ſuperficiem utrinque pertingens.

Fig. 6. Generatur ſphæra, ſi ſemicirculus circa diametrum (AF) immotam convertatur.

6 Magnitudines figuræ alicui inſcriptæ, aut circumſcriptæ, ſive figura minores, vel majores in figuram deſinere dicuntur, cum ab ea tandem differre poſſunt quantitate minori quacunque data, ſeu quantumvis parva.

Itaque ſi ea, quæ figuræ alicui inſcribuntur, ab ea tandem deficiant defectu minori quocunque dato, inſcripta dicentur in figuram deſinere. Et ſi ea, quæ alicui figuræ circumſcribuntur, excedant eam tandem exceſſu minori quocunque dato, dicentur rurſum circumſcripta deſinere in figuram.

PRO-

PROPOSITIO I.

Polygonorum ſimilium circulo inſcriptorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum (AF, IC.) Fig. 6. & 7.

Ducantur AO, BF, IR, LC. Quia polygona ponuntur ſimilia, *a* æquales erunt anguli OBA, RLI, & latera OB, BA proportionalia lateribus RL, LI. Ergo in triangulis OAB, RIL *b* anguli O, & R æquantur. Ergo etiam BFA, & LCI, qui iiſdem arcubus BA, LI inſiſtunt, ſunt *c* æquales. Anguli vero FBA, CLI in ſemicirculis ſunt *d* recti, ac proinde æquales. Ergo reliqui BAF, LIC *e* æquantur. Quoniam igitur triangula FAB, CIL ſibi mutuo æquiangula ſunt, erunt *f* ſimilia, eritque BA ad LI, ut AF ad IC. Jam, quia per hyp. polygona ſunt ſimilia, erit proportio eorum duplicata *i* proportionis laterum BA, LI; hoc eſt, ut jam oſtendi, duplicata proportionis diametrorum AF, IC. Quod erat demonſtrandum.

a Per def. 1. l. 6. *b* Per 6. l. 6. *c* Per 21. l. 3. *d* Per 31. l. 3. *e* Per corol. 9. p. 32. l. 1. *f* Per 4. l. 6. *i* Per 20. l. 6.

Corollarium

Polygonorum ſimilium circulo inſcriptorum ambitus ſunt inter ſe ut diametri.

Cum oſtenſum jam ſit BA eſſe ad LI, ut AF ad IC, etiam OB erit ad RL, ut AF ad IC, & ſic de cæteris lateribus. Ergo per 12. 5. omnia ſimul latera ad ſimul omnia, hoc eſt ambitus ad ambitum ſunt, ut AF ad IC. Fig. 6. & 7.

Digitized by Google

Lemma.

Fig. 8. *POlygona circulo inſcripta in circulum deſinunt.*

Inſcribe quadratum ACBD. Cum hoc dimi-
a Per ſchol. poſt 6. & 7. l. 4. dium ſit quadrati *a* circulo conſcripti, erit majus dimidio circuli. Quare ſi hoc auferatur e circulo, auferetur plus quam dimidium. Deinde ſingulis arcubus biſectis in E, k, H, I, inſcribe octogonum, & in E tangat FG, cui BC, DA occurrant in G, & F, erit CF parallelogrammum, cujus cum dimidium ſit triangulum
b Per 41. l. 1. *b* CEA, erit hoc plus quam dimidium ſegmenti CEA. Eodem modo ſingula triangula AkD, DIB, &c. ſingulorum ſegmentorum plus ſunt quam dimidia. Ergo omnia triangula omnium ſegmentorum plus quam dimidia ſunt. Hæc ergo ſi ex illis, hoc eſt ex reſiduo circuli auferas, plus quam dimidium auferetur. Pari argumento ſi inſcribantur circulo polygona duplo ſemper plurium laterum, oſtendam e reſiduo circuli ſemper auferri plus quam dimidium. Ergo reſiduum erit
c Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l. 6. tandem *c* minus quocunque dato, ac proinde polygona inſcripta tandem a circulo deficient quantitate minori data quacunque, hoc eſt in circu-
o Per def. 6. l. 12. lum *o* deſinent. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Fig. 6. & 7. *CIrculorum proportio eſt duplicata proportionis diametrorum.*

Polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcri-
a Per 1. l. 12. ptorum proportio ſemper duplicata *a* eſt proportionis diametrorum. Atqui polygona circulo in
b Per lem. infinitum inſcripta in circulum *b* deſinunt. Ergo

go per poriſma univerſale ſequens etiam circulorum proportio duplicata eſt proportionis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

Poriſma univerſale.

Si ea, quæ duabus figuris (A, B) inſcribuntur, in ipſas deſinant, quam proportionem inter ſe ſemper habent inſcripta, eandem habent & figuræ.

R			
A	B	X	Z
C	F		

Sit ratio X ad Z ea, quam inſcripta ſemper habent inter ſe. Si ergo negas rationem figurarum A, B eandem eſſe cum ratione X ad Z, quam ſemper habent ea, quæ figuris inſcribuntur, ſit ratio A ad B primo major ratione X ad Z. Ergo alia quædam quantitas R minor quam figura A, erit ad figuram B, ut X ad Z. Quoniam inſcripta per hyp. deſinunt in figuras A, & B, erunt aliqua figuris A, & B inſcripta, quæ ab ipſis deficient *a* minori quantitate, quam R deficiat a figura B. Sint ea C, & F. Ergo C erit majus, quam R. Ergo C eſt ad B in *b* majori, quam R ad B; hoc eſt (ut ponebatur) quam X ad Z; hoc eſt per hyp. quam idem C ad F. Quoniam igitur C eſt ad B in majori proportione, quam ad F, erit B figura minor *c* ſibi inſcripto F, totum ſua parte. Eodem modo oſtendetur, rationem B ad A non poſſe eſſe majorem ratione Z ad X. Ergo ratio A ad B æqualis eſt rationi X ad Z. Quod erat demonſtrandum.

a Per def. 6. l. 12.

b Per 8. l. 5.

c Per 10. l. 5.

PROPOSITIO III, IV.

Sunt prolixæ, & difficiles tyronibus, nec alium habent uſum, quam ut per eas demonſtretur quinta, quam nos ſine illis multo facilius demonſtrabimus.

Lemmata ad P. V.

I.

Fig. 9. *Si duæ pyramides triangulares ſecentur planis (OSE, RXZ) ad baſes (ABC, IVQ) parallelis, quæ dividant latera (CF, QL) proportionaliter (in E, & Z,) erunt (OSE, RXZ) inter ſe ut baſes (ABC, IVQ.)*

Quoniam parallela plana OSE, ABC ſecantur a planis BFC, AFB, AFC, erunt ſectiones communes SE, BC, & OS, AB, & OE, AC *a* parallelæ. Ergo anguli OSE, ABC, & SOE, BAC, & OES, ACB bini, & bini æquales *b* ſunt. Quare ſectiones OSE, ABC *c* ſunt ſimiles. Eodem modo ſimiles eſſe oſtendam ſectiones RXZ, IVQ. Ergo ratio ſectionis ABC ad OSE eſt duplicata *d* rationis laterum BC ad SE, & ratio ſectionis IVQ ad RXZ duplicata eſt rationis VQ ad XZ. Atqui rationes BC ad SE, & VQ ad XZ ſunt eædem (eſt enim BC ad SE, ut *e* CF ad EF; hoc eſt per hyp. ut QL ad ZL; hoc *f* eſt, ut VQ ad XZ.) Ergo ratio ABC ad OSE eadem eſt *i* cum ratione IVQ ad RXZ. Quod erat propoſitum.

a Per 16. l. 11.
b Per 10. l. 11.
c Per 4. l. 6.
d Per 19. l. 6.
e Per coroll. 1. p. 4. l. 6.
f Per idem corol.
i Per 35. l. 5.

Pyra-

I I.

Pyramidi (ZCAF) triangulam habenti baſim prismata in infinitum inſcripta deſinunt in ipſam pyramidem. Fig.10.

Dividatur latus pyramidis in aliquot æquales partes AB, BG, GF, & per BG factis ſectionibus GDN, & BEP baſi ZAC parallelis inſcripta intelligantur pyramidi priſmata triangularia BEPMAO, & GDNKBQ. His deinde extra pyramidem continuatis intelligantur pyramidi eſſe circumſcripta priſmata CIBA, PXGB, NHFG. Exceſſus circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt ſolida IM, XK, HG, quæ ſimul ſumpta æquantur priſmati CIBA; nam HG eſt *o* æquale DB, ac proinde HG cum XK æquatur PXGB; hoc eſt *p* MEBA. Ergo tria HG, XK, IM æquantur toti CIBA. Atqui ſi AF in plures ſine fine partes æquales dividatur, ac proinde priſmatum numerus in infinitum multiplicetur, AB fiet *a* quavis data minor. Ergo etiam *b* priſma CIBA fiet quovis dato minus. Ergo priſmatum circumſcriptorum (multoque magis pyramidis ZCAF, quæ pars eſt priſmatum ſibi circumſcriptorum) exceſſus ſupra inſcripta priſmata fiet quovis dato minor. Ergo inſcripta priſmata in pyramidem *c* tandem deſinunt. Quod erat demonſtrandum.

o Per 25. l.11. *p* Per eand. *a* Collig. ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l.6. *b* Patet ex 25. l. 11. *c* Per def. 6. l.12.

PROPOSITIO V.

Pyramides triangulares æque altæ eam inter ſe proportionem habent, quam baſes (AQR, ESX.) Fig.11.

Pyra-

Pyramidum altitudines æquales referant latera AP EZ, quibus in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas utrinque diviſis, factiſque per diviſionum puncta ſectionibus ad baſes parallelis, intelligantur utrique pyramidi inſcripta eſſe priſmata trigona æque multa, & æque alta. Jam vero, quia priſmata LA, IE ſunt æque alta, erit priſma LA ad priſma IE, ut *a* baſis LOB ad baſim INK; hoc eſt, *b* ut baſis QRA ad baſim SXE. Eodem modo oſtendam, ſingula priſmata pyramidi QPAR inſcripta eſſe ad ſingula inſcripta pyramidi SZEX, ut baſis QAR ad baſim SEX. Ergo etiam *c* ſimul omnia ſunt ad omnia, ut baſis ad baſim. Quare cum ea tandem deſinant *d* in ipſas pyramides, etiam ipſæ erunt *e* ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 1. p. 34. l. 11. *b* Per lem. 1. *c* Per 12. l. 5. *d* Lem. 2. *e* Per poriſ. univer. poſt p. 2. l. 12.

PROPOSITIO VI.

Fig. 12. & 13.

PYramides quæcunque æque altæ eam inter ſe rationem habent, quam baſes (AB, CFO.)

Reſolvantur baſes in triangula A, B, C, F, O, pyramides vero totæ in pyramides triangulares. Pyramis AX eſt ad pyramidem OZ, ut *a* A ad O; & pyramis *b* BX eſt ad pyramidem OZ, ut B ad O. Ergo pyramides ſimul AX, BX (hoc eſt tota ABX) ſunt ad pyramidem OZ, ut A, B *c* ſimul ad O. Eodem diſcurſu pyramis ABX eſt ad pyramidem FZ, ut *d* AB eſt ad F; & ABX eſt ad CZ, ut *e* AB eſt ad C. Ergo ABX *f* eſt ad tres ſimul OZ, FZ, CZ, hoc eſt ad totam pyramidem OFCZ, ut AB ad OFC. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc. *b* Per eand. *c* Per 24. l. 5. *d* Per præc. *e* Per 24. l. 5. *f* Per eand.

PROPOSITIO VII.

Omnis pyramis tertia pars eſt priſmatis habentis eandem baſim, & altitudinem.

Sit primo pyramis trigona BGAC in eadem baſi, & altitudine cum priſmate BACFEO, ducantur BF, AO, AF. Triangula BFC, BFO ſunt *a* paria. Ergo pyramis BFCA pyramidi BOFA *b* æqualis eſt. Ob eandem cauſam pyramis OEAF par eſt pyramidi OBAF; hoc eſt pyramidi BOFA, ſunt enim eædem pyramides. Igitur etiam BFCA, & OEAF æquales ſunt. Omnes igitur tres BFCA, OEAF, OBAF, ſive BOFA ſunt pares. Ergo tres ſimul unius BFCA triplæ ſunt. Atqui tres illæ conſtituunt priſma BACFEO. Illud ergo pyramidis BFCA, hoc eſt *c* BGAC triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 14.
a Per 34. l. 1.
b Per 5. l. 12.
c Per 5. l. 12.

Sit deinde pyramis quævis eandem habens baſim, & altitudinem cum priſmate AEFH, ductis lineis BC, BO, BE, & NI, NG, NH, reſolve priſma in triangularia priſmata, & pyramidem in trigonas pyramides. Quo facto patet demonſtratio ex prima parte. Nam ſingulæ partes priſmatis triplæ erunt ſingularum partium pyramidis. Ac proinde totum priſma totius pyramidis triplum eſt. Quod erat demonſtrandum.

Fig. 15.

PROPOSITIO VIII.

Similium pyramidum (OACB, KHIN) proportio eſt triplicata ejus, quam habent homologa latera (AB, HN.)

Fig. 16.

Sint

Sint primo trigonæ, perfectis parallelogrammis AM, & HQ, ſuper his conſtitue parallelepipeda AG, HL in altitudine pyramidum, quæ cum
a Defin. 9. l. 11. pyramides ſint ſimiles, etiam patet ſimilia *a* eſſe.
b Per 28. l. 11. Ducantur jam EF, RP, & per EFCB, item per RPIN ſecabuntur *b* parallelepipeda in duo
c Per præc. priſmata æqualia: ſingula horum *c* tripla ſunt pyramidum OACB, & KHIN. Utraque ergo ſimul: hoc eſt tota parallelepipeda AG, HL ſextupla ſunt pyramidum. Pyramides ergo parallelepipedis proportionales ſunt. Sed horum ratio
d Per 33. l. 11. *d* triplicata eſt rationis laterum AB, HN. Ergo & illarum. Quod erat demonſtr.

Fig. 17. Quod ſi pyramides ſimiles fuerint polygonæ, reſolvantur in triangulares AR, BR, CR, & OK,
e Ex 20. & 5. l. 6. & ex defi. 9. l. 11. EK, FK. Facile *e* oſtendes etiam AR ipſi OK, & BR ipſi EK, & CR ipſi FK eſſe ſimiles. Ergo per 1. partem ratio pyramidum AR, OK eſt triplicata rationis IM ad PZ; & ratio pyramidum BR, & EK triplicata eſt rationis MX ad ZS; hoc eſt denuo per hyp. rationis IM ad PZ; & ratio pyramidum CR, FK eſt triplicata rationis XQ ad ST; hoc eſt rurſum IM ad PZ. Cum ergo ratio ſingularum ad ſingulas ſit triplicata rationis
c Per 12. l. 5. IM ad PZ, etiam ratio *c* omnium ad omnes (hoc eſt ratio totius pyramidis ABCR ad totam OEFK) triplicata erit rationis IM ad PZ. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO IX.

Fig. 18. & 19. *Æquales pyramides reciprocant baſes, & altitudines; & quæ reciprocant, ſunt æquales.*

1. Pars. Sint primo pyramides trigonæ BACO, HKNL:

HkNL: perfectis parallelogrammis BE, HR, ſuper his ſint parallelepipeda BF, HP. Erunt hæc (ut oſtendimus in 8.) pyramidum ex hyp. æqualium ſextupla, ac proinde æqualia inter ſe. Sunt vero horum parallelepipedorum altitudines Hk, BA eædem, quæ pyramidum, baſes vero BE, HR duplæ *o* ſunt baſium pyramidalium BCO, HNL, ac proinde iis proportionales. Cum igitur ob parallelepipedorum æqualitatem ſit ut BE ad HR, ita *a* reciproce Hk ad BA, etiam erit ut baſis BCO ad baſim HNI, ita reciproce altitudo Hk ad altitudinem BA. Quod erat demonſtrandum.

o Per 34. l. 1.

a Per 34. l. 11.

Quod ſi pyramides habeant baſes polygonas, retentis iiſdem altitudinibus reducantur ad trigonas, eruntque hæ illis æquales per 6. Sed pyramides ſic reductæ per jam demonſtrata reciprocant baſes, & altitudines. Ergo etiam pyramides datæ polygonæ reciprocant baſes, & altitudines. Quod erat demonſtrandum.

2. Pars. Quoniam jam ponitur eſſe BCO ad HNL, ut Hk ad BA, erit quoque BE ad HR, ut Hk ad BA. Ergo parallelepipeda BF, HP *b* ſunt æqualia, ergo & ſextæ eorum partes, nempe pyramides BACO, HkNL. Quod erat demonſtrandum.

b Per 34. l. 11.

Corollaria.

QUæ de pyramidibus demonſtrata ſunt per 6, 8, 9, etiam conveniunt quibuſcunque priſmatis, cum hæc tripla *c* ſint pyramidum eandem baſim, & altitudinem habentium. Igitur

c Per 7. l. 12.

1 Priſmatum æque altorum eadem eſt proportio, quæ baſium. Id enim oſtenſum eſt de pyramidibus prop. 6.

2 Si-

2 Similium priſmatum proportio eſt triplicata proportionis homologorum laterum. Id enim oſtenſum eſt de pyram. p. 8.

3 Æqualia priſmata reciprocant baſes, & altitudines, & quæ reciprocant ſunt æqualia. Id enim de pyramidibus oſtenditur p. 9.

Mirum eſt hæc ab Euclide prætermiſſa, cum præcipua ſint, quæ de ſolidis rectilineis tradi poſſunt.

Scholium.

EX hactenus demonſtratis elicietur dimenſio quorumcunque priſmatum, ac pyramidum.

Priſmatis ſoliditas producitur ex altitudine in baſim ducta, pyramidis vero ex tertia altitudinis parte ducta in baſim.

Ut ſi priſmatis altitudo ſit 5 pedum, baſis vero 25 pedum quadratorum, multiplica 25 per 5, proveniunt 125 pedes cubici pro ſoliditate priſmatis.

Fig. 15. & 14. *Eſto enim priſma polygonum AH. Ejus baſi AE intelligatur æquale eſſe triangulum BAC, ſuperque eo priſma BE æque altum, ac AH. Erunt* c *BE, AH æqualia priſmata. Sed BE priſma* d *producitur ex altitudine ſua in baſim BAC, hoc eſt* e *AE. Ergo etiam priſma AH fit altitudine ſua, quæ altitudini priſmatis BE æqualis ponitur, in baſim AE.*

c Per coroll. 1. præc.
d Per ſchol. p. 40. l. 11.
e Per conſt.

Hinc vero, & ex 7. patet demonſtratio partis ſecundæ.

Lemma ad Prop. X.

PYramides, & priſmata, quæ conis, & cylindris in infinitum deſcribuntur, in conos, & cylindros deſinunt.

De-

Demonſtratur ut lemma propoſitionis 2 adminiculo propoſit. 6. & coroll. 1. poſt pr. 9; ſi ut iſtic plana circulo inſcripta, ita hic pyramides, & priſmata, quæ ſuper planis illis tanquam baſibus conſiſtunt, a cono, & cylindro auferantur.

PROPOSITIO X.

Omnis conus tertia pars eſt cylindri eamdem baſim, & altitudinem habentis. Fig. 20.

Baſi CL intelligatur inſcribi polygonum regulare quotcunque laterum, & ſuper illo tanquam baſi, cono quidem pyramis, cylindro autem priſma inſcribi. Erit pyramis *a* tertia pars priſmatis. Et ſi rurſum inſcribatur circulo polygonum laterum duplo plurium, ſuperque eo inſcribatur cono pyramis, & cylindro priſma, iterum erit pyramis tertia pars priſmatis. Atque hoc ſemper eveniet. Quare cum pyramides in conum, *b* priſmata in cylindrum deſinant, etiam *c* conus tertia pars cylindri erit. Quod erat demonſt.

a Per 7. l. 12.
b Per lem. præc.
c Per poriſ. univ. poſt 2. l. 12.

PROPOSITIO XI.

Conorum æque altorum (BAF, QXR) proportio eadem eſt, quæ baſium (CL, SE). Idem accidit cylindris æque altis. Fig. 20. & 21.

Pyramides conis æque altis inſcriptæ ſunt, *d* ut baſes. Atqui *e* pyramides tandem in conos deſinunt. Ergo etiam *f* coni ſunt ut baſes. Cum vero cylindri conorum eandem cum ipſis baſim, & altitudinem habentium ſint tripli, etiam ipſi erunt, ut baſes. Quod erat demonſtrandum.

d Per 6. l. 12.
e Per lem. ante 10. l. 12.
f Per poriſ. univ.

Corol-

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur etiam priſmata, & cylindros æque alta eſſe inter ſe ut baſes, imo quælibet corpora cylindriformia æque alta; hoc eſt quæ producuntur ex quibuſcunque planis in eandem altitudinem ductis, eſſe inter ſe ut baſes. Eodem modo de pyramidibus, & cono æque altis, & conicis quibuſcunque ratiocinare.

PROPOSITIO XII.

Fig. 20. & 21.

COnorum ſimilium (BAF, & QZR) proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BF, & QR), quæ ſunt in baſibus. Idem cylindris ſimilibus accidit.

Similium conorum baſibus inſcribe polygona ordinata, quæ proinde ſimilia erunt. Pyramides ſuper his polygonis inſcriptæ conis etiam ſimiles ſunt, quod facile oſtenditur. Ergo earum proportio eſt triplicata *a* proportionis laterum BL, QE; hoc eſt *b* proportionis diametrorum BF, QR. Quare cum pyramides *c* in conos deſinant, etiam conorum proportio *d* eſt triplicata proportionis diametrorum BF, QR. Quod erat demonſtrandum.

De cylindris patet theorema, cum ſint tripli conorum.

a Per 8. l. 12. *b* Eſt demonſtr. in 1. l. 12. *c* Per lem. ant. 10. l. 12. *d* Per poriſ. univ.

PRO-

PROPOSITIO XIII.

SI cylindrus (BI) ſecetur plano (RL) baſibus (BQ, CI) parallelo, erit pars (BL) ad partem (RI), ut axis ſegmentum (AO) ad ſegmentum axis (OF.) Fig. 22.

Demonſtratur ut prima ſexti.
Theorema eodem modo verum eſt de ſuperficie.

PROPOSITIO XIV.

CYlindri (AR, & CI) baſibus (MQ, GH) æqualibus ſunt inter ſe, ut altitudines (LZ, SF). Idem conis accidit. Fig. 23. & 24.

Abſcinde ab altiori cylindro AR cylindrum AO altitudinis LE ejuſdem cum SF. Igitur cylindri AO, CI *a* æquales ſunt. Cum igitur cylindrus AO ſit ad cylindrum AR, ut *b* LE ad LZ, etiam CI erit ad AR, ut LE ad LZ, hoc eſt (quia LE, & SF *c* æquantur) ut SF ad LZ. Quod erat demonſtrandum.

a Per 11. l. 12.
b Per præc.
c Per conſt.

Corollarium.

THeorema etiam verum eſt de priſmatis, itemque de pyramidibus, & demonſtratio plane ſimilis. Sed de priſmatis ex coroll. 1. pr. 9. lib. 12. & 25. lib. 11. ejuſque coroll. De pyramidibus ex hoc, & ex 7. lib. 12.

PROPOSITIO XV.

Fig. 24. & 25.

ÆQuales cylindri (AR, FD) reciprocant baſes, & altitudines; & ſi reciprocant, æquales ſunt. Idem conis accidit.

Demonſtratur ut propoſit. 34. lib. 11. ſed pro 32. & 25. iſthic citatis, hic adhibebitur prop. 11. & 13. lib. 12.

Scholium.

CUm nihil attulerit Euclides de ratione compoſita in corporibus, eam breviter hoc loco demonſtrabimus.

1. *Cylindrus ad cylindrum, & priſma ad priſma rationem habent compoſitam ex rationibus baſium, & altitudinum.*

Fig. 25. & 24. *Sunto cylindri FD, & AR. Ab altiori AR (nam in æque altis res per ſe patet) abſcinde AO æque altum, ac FD. Sit etiam ut baſis VT ad baſim MQ, ita FN ad X, & ut altitudo ND, ſeu BO ad altitudinem BR, ita X ad Z. Oportet igitur oſtendere, cylindrum FD eſſe ad cylindrum AR, ut FN eſt ad Z. Cylindrus FD eſt ad cylindrum AO, ut* a *baſis VT ad baſim MQ; hoc eſt,* b *ut FN ad X: Cylindrus autem AO eſt ad cylindrum AR, ut* c *BO ad BR; hoc eſt, ut* d *X ad Z. Igitur ex* e *æquo cylindrus FD eſt ad cylindrum AR, ut FN ad Z.*

a Per 11. l. 12.
b Per conſt.
c Per 13. l. 12.
d Per conſtr.
e Per 22. l. 5.

De priſmatis res eodem modo demonſtrabitur, ſed ex coroll. 1. p. 9. & coroll. p. 14.

2 *Etiam conus ad conum, & pyramis ad pyramidem rationem habent compoſitam ex rationibus*

bus

bus baſis ad baſim, & altitudinis ad altitudinem.

Sunt enim c *cylindrorum, ac priſmatum partes tertiæ.* c Per 10. ac 7. lib. 12.

PROPOSITIO XVI. XVII.

HÆ *propoſitiones omnium prolixiſſimæ non alium uſum habent, quam ut demonſtretur p.* 18. *quam nos alia faciliori via demonſtrabimus.*

Lemma ad Prop. 18.

C*Ylindri hemiſphærio inſcripti in hemiſphærium deſinunt.* Fig. 16.

Sit PZY maximus hemiſphærii ſemicirculus, ſitque radius AZ perpendicularis diametro PY. Seca AZ in aliquot æquales partes AM, MN, NZ; ductiſque per diviſionum puncta M, N perpendicularibus, &c. inſcribantur ſemicirculo rectangula OBRK, EDHS, quibus deinde extra circulum continuatis, ſemicirculo circumſcripta intelligantur rectangula FTYP, LVBO, QXDE, eruntque omnia æque alta: exceſſus autem circumſcriptorum ſupra inſcripta ſunt plana FK, LS, XE, VH, TR, quæ ſimul ſumpta conficiunt rectangulum FTYP. Nam, quia XE æquatur DS, erunt LS, VH, XE ſimul æqualia rectangulo LB; hoc eſt OR. Quare ſi adjicias utrinque plana FK, TR, erunt ſimul omnia FK, LS, XE, VH, TR æqualia rectangulo FTYP. Si jam intelligatur ſemicirculus cum rectangulis circa radium immotum AZ circumagi, inſcripta rectangula EH, OR producent cylindros hemiſphærio inſcriptos, & rectangula circumſcripta producent cylindros hemiſphærio circumſcriptos ſibi mutuo

 inſi-

inſiſtentes; & ſicut rectangulorum circumſcriptorum exceſſus ſupra rectangula inſcripta erat rectangulum FY, ita etiam cylindrorum circumſcriptorum exceſſus ſupra inſcriptos erit cylindrus a rectangulo FY genitus. Atqui hujus cylindri altitudo fiet quavis data minor, adeoque etiam ipſe quovis dato *b* evadet minor, ſi radio in plures ſine fine partes diviſo rectangulorum, indeque & cylindrorum numerus ſine fine multiplicetur. Ergo cylindrorum circumſcriptorum, multoque magis ipſius hemiſphærii, quod cylindrorum circumſcriptorum pars eſt, exceſſus ſupra inſcriptos cylindros fiet tandem quovis dato minor. Ergo cylindri hemiſphærio in infinitum inſcripti tandem deſinunt *c* in hemiſphærium. Quod erat demonſtrandum.

b Patet ex 13. l. 12.

c Per defi. 6. l. 12.

Corollarium.

EOdem modo demonſtrabitur, cylindros cono, conoidi, ſphæroidi, &c. inſcriptos in ipſa deſinere.

PROPOSITIO XVIII.

Fig. 27. S*Phærarum proportio eſt triplicata proportionis diametrorum (BK, RZ.)*

Radiis AB, YR in quot placuerit æquales partes, ſed æque multas diviſis, ductiſque per diviſionum puncta perpendicularibus, &c. intelligantur maximis ſphærarum ſemicirculis inſcripta eſſe rectangula æque multa, quæ circa radios immotos AB, YR circumacta inſcribant utrique hemiſphærio cylindros æque multos ſibi invicem inſiſtentes. Quia KC *o* eſt ad CF, ut CF ad CB, erit ratio KC ad CB duplicata *a* rationis KC ad CF, hoc eſt

o Per corol. pr. 13. l. 6.

a Per defi. 10. l. 5.

eſt rationis FC ad CB. Similiter erit ratio ZE ad ER duplicata rationis XE ad ER. Sed per conſtr. eſt KC ad CB, ut ZE ad ER. Ergo etiam *b* FC eſt ad CB, ut XE ad ER. Sed BC eſt ad CO per conſt. ut RE ad ES. Igitur ex æquo *c* FC eſt ad CO, ut XE ad ES. Cylindri igitur *d* FL, XQ ſimiles ſunt, ac proinde eorum proportio eſt triplicata *e* proportionis diametrorum FI, XV, ſeu ſemidiametrorum FC, XE, quæ ſunt in baſibus. Sed proportio FC ad XE eadem eſt cum proportione, quæ eſt inter diametros ſphærarum BK, RZ (nam ut jam oſtendi, FC eſt ad XE, ut CO ad ES; hoc eſt ut BK ad RZ, ipſarum CO, ES per conſtr. æque multiplices). Ergo ratio cylindrorum FL, XQ eſt triplicata rationis diametrorum BK, RZ. Eodem modo demonſtrabimus, ſingulos cylindros hemiſphærio uni inſcriptos ad cylindros ſingulos inſcriptos alteri hemiſphærio rationem habere triplicatam rationis diametrorum BK, RZ. Ergo etiam ratio ſimul omnium ad omnes ſimul *i* triplicata eſt rationis diametrorum BK, RZ. Quare cum aggregata cylindrorum tandem in hemiſphæria *k* deſinant, hemiſphæriorum quoque, ac proinde & ſphærarum ratio triplicata erit *n* rationis diametrorum. Quod erat demonſtrandum.

b Per 35. l. 5.
c Per 22. l. 5.
d Per defin. 4. l. 12.
e Per 12. l. 12.
i Per 1 l. 5.
k Per lem. præc.
n Per poriſ. univ.

Corollarium.

NOta igitur proportione diametrorum, etiam ſphærarum proportio innoteſcit, ut ſi minoris diameter ſit unius pedis, majoris 10. continuetur ratio 1. ad 10. per quatuor terminos 1. 10. 100. 1000. ut 1. ad 1000. quartum terminum, ita ſphæra minor ad majorem.

Conorum, cylindrorum, ſphæræ dimenſio dabitur lib. ſeq. ex Archimede.

Scholium.

Quemadmodum ſimiles planæ figuræ per mediam proportionalem unam, ita corpora ſimilia non niſi per medias duas in proportione data augentur, vel diminuuntur.

Fig. 28. *Data ſit ſphæra, vel cubus, vel aliud corpus quodcunque, cujus radius, ſive latus ſit A. Data item ſit proportio quæcunque A ad B, ut ſubdupla. Oporteat exhibere corpus & duplum dati, & ſimile.*

Inter terminos rationis datæ A, & B inveniantur duæ mediæ proportionales X, Z, ut docuimus in Scholio poſt 13. *lib.* 6. *ſphæra, cujus radius eſt X, ſive corpus dato ſimile factum ſuper latere X, erit duplum dati.*

Nam corpora ſimilia, quorum radii, ſeu latera ſunt A, & X, rationem inter ſe habent triplicatam a *rationis A ad X; hoc eſt, eandem,* b *quam A habet ad B.*

a Corol. 2. p. 9. & per. 12. ac 18. l. 12.

b Per defi. 10. l. 5.

Atque hoc eſt celebratiſſimum illud problema, quod Deliacum a Deliaco Apolline dictum eſt, quod is lue ſæviſſima Athenas populante conſultus reſpondiſſet, peſtem ceſſaturam, ſi ejus ara, quæ cubica erat, duplicaretur. Ita Valerius Maximus lib. 8.

AN-

ANDREÆ
TACQUET
E SOCIETATE JESU
SELECTA
EX ARCHIMEDE
THEOREMATA,

Via faciliori, ac breviori demonſtrata, & novis inventis aucta.

Digitized by Google

Digitized by Google

LECTORI.

QUamvis in Mathematicis diſciplinis complures ſummi, & admirabiles viri extiterunt, prima tamen gloria communi quodam conſenſu Archimedi Syracuſano delata eſt. Sed illum plures laudant, quam legant, admirantur plures, quam intelligant. Cauſa, opinor, ſunt exemplarium moles, & raritas, ſermonis ex Græco translati obſcuritas nonnulla, demonſtrationes prolixæ, & arduæ. Putavi igitur ex ſtudioſæ juventutis uſu futurum, ſi elementis jam illuſtratis, hæc a me ſelecta ex Archimede theoremata, & via multo faciliori, ac breviori demonſtrata ſubnecterem. Selegi porro ea, quæ & admirationis plus, & utilitatis habent; viamque in demonſtrando eam tenui, ut ſperem, eum, qui elementa perceperit, hæc ſummi Geometræ præclariſſima inventa negotio haud magno aſſecuturum. Sub finem adjectis tredecim propoſitionibus Archimedis de cylindro, & ſphæra doctrinam ampliorem facio, atque inter cætera demonſtro ſeſquialteram proportionem in tribus corporibus ſphæra, cylindro, & æquilatero cono, utroque ſphæra circumſcripto, continuari. Varia inſuper ſparſim, inter quæ propoſitio 12.

& co-

& corollaria propoſ. 14. præcipua ſunt, & ſcholia omnia adjeci. Fruere iſtis, quiſquis Geometriæ candidatus es, & quantum ex Euclide profeceris, in Archimede experire. Cumque in veritatum pulcherrimarum contemplatione defigi te, evehique ſurſum perſenſeris, mentem ab infimis hiſce rebus feliciter jam avulſam attolle etiam altius, atque dirige ad veritatem primam æternam, immenſam, quæ Deus eſt, cujus ineffabili viſione nos futuros aliquando æternum beatos confido. Vale.

DE-

DEFINITIONES,

Seu vocum nonnullarum explicatio.

ESto circulus BECG, cujus centrum A, diameter BC, quam ad rectos angulos ſecet recta EG non per centrum, videlicet in D. Ex centro autem educantur radii AE, AG. His poſitis Fig 23. ex Archim.

1 Sector ſphæræ eſt, qui a ſectore circulari AECG, ſeu AEBG circa diametrum BC in orbem acto producitur.

2 Segmentum, ſeu portio ſphæræ eſt, quæ a circulari ſegmento ECG, ſeu EBG circa eandem diametrum BC in orbem acto deſcribitur.

3 Portionis ſphæricæ (EBG) vertex eſt diametri immobilis extremitas B. Baſis eſt circulus a recta EG deſcriptus. Axis eſt diametri pars BD inter verticem B, & D centrum baſeos intercepta.

4 Cum ſphæricæ portionis, aut corporis ei inſcripti, aut coni ſuperficiem nomino, ſemper intelligo abſque baſi; & dum cylindri ſuperficiem dico, intelligo ſimiliter abſque baſibus, niſi adjungatur tota; tunc enim accipiuntur & baſes.

Rurſum cum de cylindris, vel conis ago, non alios intelligo quam rectos.

Axiomata.

Fig. 1. & 16. 1 Polygoni circulo inſcripti ambitus minor eſt circuli peripheria.

Fig. 1. 2 Polygoni circulo circumſcripti ambitus circuli peripheria major eſt.

Fig. 16. 3 Quod ſi polygonum circulo inſcriptum circa diametrum (AE) una cum circulo circumagatur, erit corporis a polygono geniti ſuperficies minor ſphæræ ſuperficie. Et ſi polygonum circulo circumſcriptum circa diametrum una cum circulo circumagatur, erit corporis a polygono geniti ſuperficies major ſuperficie ſphæræ.

Fig. 17. 4 Similiter ambitus polygoni inſcripti ſegmento circulari (DAF) minor eſt peripheria ſegmenti (DAF.) Et ſi polygonum ſegmento inſcriptum una cum ſegmento circa ſegmenti axem (AO) circumagatur, erit corporis a polygono geniti ſuperficies minor ſuperficie portionis ſphæricæ (DAF)

Fig. 3. & 6. 5 Superficies priſmatis cylindro inſcripti minor eſt cylindri ſuperficie; circumſcripti vero major.

Fig. 4. & 8. 6 Et ſuperficies pyramidis cono inſcriptæ minor eſt coni ſuperficie; circumſcriptæ autem major.

PROPOSITIO PRIMA.

a Defin. 6.l.12. *Datæ ſint figuræ quæcunque ſeu planæ, ſeu ſolidæ A, B. Sint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ figuras datas A, ac B ſemper minus, ac minus excedendo in ipſas* a *deſinant,* **&** *tamen ſemper inter ſe æquales ſint.*

Dico

Dico etiam figuras A, & B æquales eſſe.

Si non, alterutra major erit: E. F. ſit ergo A major quam B exceſſu X. A. B. X. Per hypotheſim dantur magnitudines E, F inter ſe æquales, quæ excedunt figuras A, B exceſſu minori, quam X, quo A ponitur ſuperare B. Ergo F minor eſt quam A. Sed F per hypotheſim eſt æqualis E. Ergo etiam E minor eſt quam A, quod eſt abſurdum; cum per hyp. E. excedat A. Eodem modo oſtendam B non poſſe eſſe majorem quam A. Ergo cum neutra ſit major altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO II.

Datæ ſint figuræ A, & B; ſint autem magnitudines aliæ ſemper atque aliæ, quæ a figuris datis ſemper minus, ac minus deficiendo in ipſas b *deſinant, & ſemper inter ſe æquales ſint.* b Defin. 6.l.12.

Dico etiam figuras datas A, B æquales fore.

A. B. Z. O. P. Si non, alterutra minor erit. Eſto igitur A minor quam B defectu Z. Per hypotheſim dari poſſunt magnitudines O, P inter ſe æquales, quæ deficiant a figuris datis A, & B defectu minori quam Z, quo ponitur A deficere à B. Ergo P major eſt quam A. Sed P per hypotheſim eſt æqualis O. Ergo etiam O major eſt quam A, quod repugnat hypotheſi, qua ſtatuitur O minor quam A. Eodem modo oſtendam B non eſſe minorem quam

quam A. Quare cum neutra ſit minor altera, æquales erunt. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO III.

Fig. 1. ex Archim.

Ambitus polygonorum circulo circumſcriptorum, & inſcriptorum deſinunt in circuli peripheriam. Similiter & polygona ipſa in circulum deſinunt.

Si nimirum arcubus ſine fine biſectis plura ſemper, ac plura latera circulo circumſcribantur, & inſcribantur.

1 Pars I. intelligantur circulo inſcripta, & circumſcripta polygona ordinata, ſive ut traditur p. 12. lib. 4. ſive ut in hac figura, perinde erit.
a Per corol. 1. p. 4. l. 6. Manifeſtum eſt *a* FI eſſe ad EC (hoc eſt *b* totum ambitum circumſcriptum ad totum ambitum inſcriptum) ut I A eſt ad CA. Atqui
b Per 12. l. 5. I C exceſſus rectæ I A ſupra CA fit tandem quacunque data minor, ſi plura ſemper, ac plura in infinitum latera circumſcribi, & inſcribi intelligamus. Ergo etiam exceſſus ambitus circumſcripti ſupra ambitum inſcriptum tandem fiet
c Patet ex ax. 2. quovis dato minor. Ergo *c* multo magis exceſſus ambitus circumſcripti ſupra peripheriam fiet quocumque dato minor. Similiter, quia jam oſtendi defectum ambitus inſcripti ab ambitu circum-
e Patet ex ax. 1. ſcripto fieri quovis dato minorem, multo *e* magis defectus inſcripti ambitus a peripheria fiet quovis dato minor. Ambitus igitur tam inſcri-
d Per def. 6. l. 12. pti, quam conſcripti in peripheriam *d* deſinunt. Quod erat primum. Hæc ulterius demonſtrare operæ pretium non eſt, cum ſatis ſint manifeſta.

2. Pars.

2 Pars. Quia jam oſtenſum eſt exceſſum lateris FI ſupra latus EC fieri tandem quovis dato minorem (eſt enim FI ad EC, ut IA ad CA) etiam exceſſus quadrati FI ſupra quadratum EC fiet quovis dato minor. Sed ut quadratum FI ad quadratum EC, ita *e* polygonum circumſcriptum ad polygonum inſcriptum. Ergo etiam exceſſus polygoni circumſcripti ſupra inſcriptum tandem fiet dato minor. Ergo multo magis exceſſus polygoni circumſcripti ſupra circulum tandem fiet dato minor; ac proinde & polygoni inſcripti defectus a circulo dato minor aliquando erit. Igitur polygona circulo tam inſcripta, quam circumſcripta in circulum *i* deſinunt. Quod erat alterum.

e Per 22. l. 6.

i Defin. 6. l. 12.

PROPOSITIO IV.

POlygonum *b* ordinatum circulo inſcriptum (*FI NTR*) æquatur triangulo, cujus baſis eſt ambitus polygoni, altitudo vero circuli radius.

Fig. 1.

b Defin. 3. l. 4.

Et polygonum ordinatum circulo inſcriptum æquatur triangulo, cujus baſis eſt polygoni inſcripti ambitus, altitudo vero perpendicularis (AO) in latus unum ex centro ducta.

1 Pars. Radius AB ad contactum ductus *a* eſt perpendicularis ad tangentem IF. Quare ſi ductis rectis AF, AI, AN, &c. polygonum reſolvatur in triangula, erit radius AB communis omnium altitudo, adeoque triangula ipſa liquet eſſe æqualia. Ergo triangulum baſim habens parem ſummæ laterum, FI, IN, NT, &c. altitudinem vero AB, æquabitur illis *b* omnibus, hoc eſt toti polygono circumſcripto.

a Per 18. l. 3.

b Patet ex 1. l. 6.

2 Pars. Simili fere ratiocinio concludetur.

PRO-

PROPOSITIO V.

Fig. 2. *Circulus eſt æqualis triangulo, cujus baſis eſt peripheria circuli, altitudo autem ſemidiameter.*

Polygona ordinata circulo circumſcripta, & triangula baſes habentia ambitum polygoni, altitudinem vero radium circuli, ſemper ſunt *a* æqualia. Atqui polygona circulo in infinitum circumſcripta in circulum *b* deſinunt; ſimiliterque triangula (ut mox oſtendam) quæ pro baſi habent ambitum polygoni circumſcripti, pro altitudine vero radium AB, tandem deſinunt in triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB. ergo *c* circulus, & triangulum pro baſi habens peripheriam, pro altitudine radium AB æqualia ſunt.

a Per præc.
b Per 3. hujus.
c Per 1. hujus.

Quod autem triangula ſub ambitu polygoni, & radio deſinant in triangulum ſub peripheria, & radio, ſic oſtendo. Triangula ſub ambitu circumſcripti polygoni, & radio AB ſunt ad triangulum ſub peripheria, & radio AB, ut *i* baſis ad baſim, nempe ut ambitus polygoni ad peripheriam, cum altitudinem habeant communem. Sed ambitus polygoni in peripheriam *k* deſinit. Ergo & triangula deſinent in triangulum.

i Per 1. l. 6.
k Per 3. hujus.

Corollaria.

1 Ex hac, & 41. l. 1. patet, rectangulum ſub radio, & dimidia circumferentia eſſe æquale circulo: ſub radio, & tota circumferentia eſſe duplum

duplum; ſub tota diametro, & tota circumferentia eſſe quadruplum circuli.

2 Circulus eſt ad quadratum ſibi inſcriptum, Fig. 5. l. 4.
ut circumferentia dimidia (CDE) ad diametrum: ad quadratum vero circumſcriptum, ut quarta circumferentiæ pars ad diametrum.

Nam rectangulum ſub CDE, & radio CA,
ſeu GF (hoc *d* eſt ipſe circulus) eſt ad rectangu- *d* Per corollar. præc.
lum GFCE, nimirum ſub FG, & CF, (hoc
eſt ad quadratum inſcriptum BCDE) ut *e* CDE *e* Per 1. l. 6.
dimidia circumferentia eſt ad FG, ſeu CE diametrum; quod erat primum; ac proinde circulus eſt ad duplum rectanguli GFCE (hoc eſt ad FH quadratum circumſcriptum), ut CDE ad duplam diametrum CE, ſive ut quadrans CD ad diametrum CE.

PROPOSITIO VI.

Circuli circumferentia diametrum continet minus quam ter, & unam ſeptimam (ſeu $\frac{10}{70}$), plus vero quam ter, & $\frac{10}{71}$.

Ad hujus Theorematis demonſtrationem aſſumit Archimedes polygona ordinata, alterum circulo circumſcriptum, inſcriptum alterum, utrumque 96 laterum. Deinde oſtendit 96 latera circulo circumſcripta continere diametrum minus quam ter & $\frac{1}{7}$: ac proinde circumferentiam, quæ ipſis minor eſt, etiam continere diametrum minus quam ter, & $\frac{1}{7}$. Latera vero 96 circumferentiæ inſcripta (ac proinde & circumferentiam, quæ ipſis minor eſt) amplius continere dia-

diametrum: quam ter, & $\frac{10}{71}$. Porro longior eſt hujus rei demonſtratio, quam ut hoc loco adferri debeat. Quod ſi ad polygona plurium adhuc laterum Geometricum ratiocinium velimus extendere, limites jam ſtatutos arctare poterimus magis, magiſque ſine termino, atque ita propius in infinitum ad veram proportionem accedere. Præſtitum eſt hoc a Ludolpho Ceulen, Grimbergero, Metio, Snellio, aliiſque. Proportiones præcipuas hactenus inventas hic ſubjicio.

Prima eſt Archimedis hujuſmodi
Diameter 7
Circumfer. 22. major vera.
Diameter 71
Circumf. 223. minor vera

Rationes 22. ad 7, & 223 ad 71. ſi ad commune conſequens reducantur (quod fit eodem modo, quo fractiones revocantur ad eundem denominatorem) rationes orientur 1562 ad 497, & 1561 ad 497.

Poſita igitur diametro partium 497
erit circumferentia major vera 1562
& circumferentia minor vera 1561

Utraque igitur a vera differt quantitate minori quam ſit $\frac{1}{497}$ pars diametri. Quod ſi rationes 7 ad 22, & 71 ad 223 reducantur ad commune conſequens, provenient ratione 1561 ad 4906., & 1562 ad 4906.

Poſita igitur circumferentia partium 4906,
erit diameter minor vera 1561.
diameter major vera 1562.

Utraque igitur a vera diametro differt quantitate minori, quam ſit pars $\frac{1}{4900}$ circumferentiæ.

Pro-

Digitized by Google

Proportio tradita a Metio eſt Archimedæa multo accuratior. Juxta hanc eſt

Diameter 113.

Circumf. 355.

Inter omnes parvis numeris conſtantes nulla veræ propinquior: ex hac enim, poſita diametro 10, 000, 000, provenit circumferentia 31, 415, 929, quæ a vera ſolum penes notam primam 9 differt exceſſu paulo majore, quam ſint duæ particulæ decimillioneſimæ diametri.

Sed utraque multo exactior eſt gemina illa Ludolphi a Ceulen: prioris termini conſtant notis 21, poſterioris vero notis 36.

Diameter

100000000000000000000

Circumf. major vera

314159265358979323847.

Circumf. minor vera

314159265358979323846.

Differentia utriuſque circumferentiæ eſt particula una diametri denominata a numero, qui conſtat unitate, & 20 cifris, ac proinde tam hæc, quam illa a vera circumferentia differt minori quantitate, quam ſit diametri particula dicta, videlicet centies millioneſies millioneſies millioneſima

Diameter

1000000000000000000000000000

0000000000

Circumf. major vera.

314159265358979323846264338

327950289

Circumf. minor vera.

314159265358979323846264338

327950288.

 Diffe-

Differentia utriuſque circumferentiæ, inter quam vera exiſtit, eſt diametri particula una denominata a numero, qui conſtat unitate, & 35 cifris, quæ particula ad diametrum minorem habet proportionem, quam arenula una ad orbem terræ. Non enim conſtat orbis terræ tot arenulis, quot continentur particulæ tales in diametro.

Fruſtra igitur ſit ulterius progredi. Progrediere nihilominus ultra in infinitum, ſi ratiocinium Geometricum, cujus methodum expeditam tradit Snellius, placuerit continuare.

Scholium.

Proportionis jam traditæ fructus eximii ſunt hi, qui ſequuntur.

Inventio Diametri ex circumferentia.

Majorem terminum unius e proportionibus jam traditis ſtatue primo loco, minorem ſecundo, circumferentiam tertio; his tribus numeris quæratur per regulam auream quartus proportionalis; is erit quæſita diameter.

Ut ſi detur circumferentia maximi circuli terræ milliaria continere Belgica unius horæ 8640, *& quæratur terræ diameter, ſic ſtabunt termini.*

355——113——8640——

multiplica jam ſecundum per tertium, & productum divide per primum; proveniunt milliaria Belgica 2750 $\frac{14}{71}$ *pro diametro orbis terræ.*

In-

Inventio circumferentiæ ex Diametro.

TErminus minor unius e proportionibus ſupra traditis ſtatuatur primo loco: major ſecundo: Diameter nota tertio. His tribus numeris quæratur quartus proportionalis. Is dabit quæſitam circumferentiam.

Ut ſi detur orbis terræ diameter continere milliaria Belgica unius horæ $2750\frac{14}{71}$, *& quæratur ambitus; termini ita ſtabunt:*

113——355——$2750\frac{14}{71}$ ——

Tunc ſecundum multiplica per tertium, & productum divide perprimum: proveniunt milliaria Belgica 8640. *pro ambitu orbis terræ.*

Quam modice hæc circumferentia veram excedat, dictum eſt ſupra, exceſſu videlicet paulo majore, quam ſint diametri terreſtris duæ particulæ decimillioneſimæ, hoc eſt 9 *circiter, aut* 10 *pedibus Rhynlandicis, quorum* 18000 *conſtituunt milliare horarium. Quod ſi utamur proportione Ludolphina etiam priori, cujus termini conſtant* 21 *notis, invenietur circumferentia inſenſibiliter a vera differens non ſolum diametro data milliariorum Belgicorum* 2750, *qualis eſt terræ; verum etiam licet diameter ponatur centum milliarium eorundem milliariorum, qualis fortaſſe eſt diameter firmamenti; hac enim poſita proveniet circumferentia minori quantitate a vera differens, quam una centimillioneſima particula pedis Rhynlandici. Quod ſi ad inveſtigandam circumferentiam orbis terræ utamur proportione Archimedis, intervallum circumferentiarum veræ majoris, ac minoris excedet* 5 *milliaria Belgica. Non eſt igitur adhibenda Archimedæa pro-*

Digitized by Google

portio, niſi in quantitate parva; imo ſemper expediet Metiana uti, quæ & modicis conſtat terminis, & pluſquam millies exactior eſt.

Circuli dimenſio.

SEmidiameter multiplicata per dimidiam circumferentiam producit aream circuli: quemadmodum patet ex coroll. 1. *p.* 5. *hujus.*

Ut ſi ſemidiametrum orbis terræ, quæ neglecta fractione continet milliaria Belgica 1375, *multiplicemus per dimidium terræ ambitum, per milliaria nempe Belgica* 4320; *provenient milliaria Belgica quadrata* 5, 940, 000 *pro circulo maximo terræ. Differentia inventa circularis areæ a vera habetur, ſi differentia inventæ circumferentiæ dimidiæ vera ducatur in ſemidiametrum datam, aut ſi differentia ſemidiametri inventæ a vera ducatur in datam ſemicircumferentiam.*

Dimenſio cylindrorum, & conorum.

EAm hic appono, quod a circuli dimenſione pendeat. Cylindrus igitur, & priſma quodvis producitur ex altitudine multiplicata per baſim, Conus, & pyramis ex tertia altitudinis parte in baſim ducta; ſunt enim partes tertiæ cylindrorum, ac priſmatum eandem cum ipſis baſim, & altitudinem habentium per 10. *&* 7. *lib.* 12.

Sit baſis cylindri, aut coni 50 *ped. quadratorum, altitudo pedum* 100. *Duc* 100 *in* 50, *proveniunt* 5000 *pedes cubici pro ſoliditate cylindri. Duc tertiam partem altitudinis* 100, *nimirum* $33\frac{1}{3}$ *in* 50, *proveniunt* $1666\frac{2}{3}$ *pedes cubici pro ſoliditate coni.*

PRO-

PROPOSITIO VII.

Circulorum peripheriæ eam inter ſe proportionem habent, quam diametri. Fig 6. & 7.l.12.

Nam polygonorum ſimilium circulo ſine fine inſcriptibilium ambitus ſunt inter ſe ſemper, ut *a* diametri AF, & IC, Sed hi *b* ambitus in peripherias deſinunt. Ergo *c* etiam peripheriæ ſunt inter ſe ut diametri. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. p.1. l.12.
b Per 3. hujus.
c Per poriſ.univ. l.12.

PROPOSITIO VIII.

Superficies priſmatis cylindro tam circumſcripti, quam inſcripti æquatur rectangulo, cujus altitudo eſt latus cylindri, baſis vero æqualis perimetro baſis priſmaticæ. Fig. 3.

1. Pars. Priſmatis conſcripti ſuperficies tangit cylindrum ſecundum lineas EA, NF, &c. quæ ſunt cylindri latera; hæc autem (quod ex hyp. cylindrus ſit rectus) ad planum baſeos recta ſunt, ac proinde etiam *d* recta ad lineas CG, GM, &c. Sunt vero & æqualia inter ſe. Igitur unum cylindri latus communis eſt omnium rectangulorum CO, OM, MH, &c. altitudo: Conſcripti igitur priſmatis ſuperficies æquatur *f* rectangulo ſub ambitu baſis priſmacæ, & priſmatis, ſeu cylindri latere contento.

d Per def. 3. l.11.
f Patet ex 1. l.6.

Eadem eſt ratio ſecundæ partis, nam latus cylindri communis rurſum eſt altitudo rectangulorum BDIk, kIQP, &c. quæ conſtituunt ſuperficiem priſmatis inſcripti.

PROPOSITIO IX.

Fig. 74. *Pyramidis ordinatæ cono recto circumſcriptæ ſuperficies æqualis eſt triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia (FHLD), altitudo autem latus coni (BG.)*

Et pyramidis ordinatæ cono recto inſcriptæ ſuperficies æquatur triangulo, cujus baſis eſt baſeos pyramidalis circumferentia, altitudo vero perpendicularis (BO) a vertice in latus baſeos deducta.

1 Pars. Ducantur ad contactus G, k, M rectæ BG, Bk, BM. Erunt hæ recti coni latera, ac proinde æquales. Et quia axis BA *a* rectus eſt baſis plano FkD, etiam planum *b* GBA plano FkD rectum erit. Atqui HG perpendicularis *c* eſt ad AG communem ſectionem planorum FkD, & GBA. Ergo HG etiam *d* recta eſt plano GBA, ac proinde perpendicularis quoque eſt ad *e* ipſam BG. Ergo BG latus coni, eſt altitudo trianguli FBH. Eodem modo latus coni erit altitudo reliquorum HBL, LBD, &c. Igitur triangulum circumferentia FHLD, & latere coni comprehenſum æquatur ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ abſque baſi. Quod erat primum.

a Per hyp. *b* Per 18. l. 11. *c* Per 18. l. 3. *d* Collig. ex defin. 4. l. 11. *e* Per defi. 3. l. 11.

2 Partis ſimilis fere demonſtratio eſt.

PRO-

PROPOSITIO X.

Superficies priſmatis ordinati cylindro recto circumſcripti deſinit a in cylindri ſuperficiem: & pyramidis cono recto circumſcripta ſuperficies in coni ſuperficiem deſinit. Fig. 3. & 4. a Defin. 6.l.12.

1 Pars. Priſmatum ordinatorum cylindro ſine fine conſcriptorum, & inſcriptorum ſuperficies habebunt tandem inter ſe differentiam data minorem, uti facile patebit ex 8. & 3. hujus. Multo igitur magis ſuperficies circumſcripti priſmatis a ſuperficie cylindri inter inſcriptam, & circumſcriptam media differet differentia minori quacunque data; hoc eſt, *b* deſinet in cylindricam ſuperficiem minus ſemper, ac minus excedendo. b Per defi.6.l.12.

2 Pars. Eodem modo oſtenditur ex 9. & 3. hujus.

In figuris tantum exhibentur cylindri, & coni ſemiſſes, ne multitudo linearum confuſionem pareret. Cæterum cogitandi ſunt cylindrus, & conus integri, quos priſmata, & pyramides circumſcripta ambiunt. Sic enim clarius apparet, planas ſuperficies circumſcriptas eſſe majores, ex 3. axiomate.

Lemma ad ſequen.

Sint AB, CD, EF proportionales, ſitque KB dimidia AB, & EG dupla EF; etiam KB, CD, EG proportionales erunt. Fig. 7.

Recta kB eſt ad AB, ut EF ad EG. Rectangulum ergo kB, EG æquatur per 16. lib. 6. rectangulo AB, EF. Sed hoc per 17. lib. 6. æqua-

quatur quadrato CD. Ergo & rectangulum KB, EG par eſt quadrato CD. Ergo per 17. lib. 6. KB, CD, EG ſunt puoportionales.

PROPOSITIO XI.

Fig. 5. & 6. *Circulus, cujus radius (GH) eſt medius proportionalis inter recti cylindri latus (BC), & baſeos diametrum (BD) æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ.*

Intelligantur circulis ABN, GPH circumſcripta eſſe ordinata polygona; adeoque ſimilia NM, RS, & ſuper NM polygono erectum eſſe priſma cylindro circumſcriptum. Quoniam BD, GH, BC ex hyp. ſunt proportionales, etiam AD (ſeu AN) GH, & dupla BC *o* proportionales erunt. Jam triangulum ſub AN, & ambitu polygoni MN contentum *a* æquatur polygono conſcripto NM; rectangulum vero ſub BC, ſeu EF, & eodem ambitu NM (hoc eſt *b* triangulum ſub ambitu NM, & dupla BC) æquale eſt *c* ſuperficiei priſmatis cylindro conſcripti. Atqui triangulum ſub ambitu NM, & AN eſt ad triangulum ſub ambitu NM, & dupla BC, *o* ut AN ad duplam BC. Ergo etiam polygonum NM eſt ad ſuperficiem priſmatis cylindro conſcripti, ut AN ad duplam BC. Sed quia jam oſtendi AN, GH duplam BC eſſe proportionales, ratio AN ad duplam BC eſt duplicata *d* rationis AN ad GH. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis rationem habet duplicatam rationis AN ad GH. Sed etiam polygonum NM ad ſimile ſibi polygonum GRQS rationem habet duplicatam rationis AN ad GH,

o Per lem.

a Per 4. hujus.

b Patet ex 41. l. 1.

c Per 8. hujus.

o Per 1. l. 6.

d Per def. 10. l. 5.

GH, ut facile colligitur ex 1. lib. 12. Ergo polygonum NM ad ſuperficiem priſmatis, & ad polygonum GRQS eandem habet rationem; quæ proinde æqualia *e* ſunt. Eodem modo oſtendam, prisſmaticas ſuperficies cylindro in infinitum circumſcriptibiles ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo GPH in infinitum circumſcribi poſſunt. Quare cum & ſuperficies priſmaticæ *f* in cylindri ſuperficiem, & polygona *i* in circulum GPH deſinant, etiam cylindri ſuperficies circulo GPH æqualis *k* erit. Quod erat dem.

e Per 9. l.5.
f Per 10. hujus.
i Per 3. hujus.
k Per 1. hujus.

Ex egregio hoc theoremate exhibetur circulus æqualis ſuperficiei cylindricæ.

Corollaria.

1 *SUperficies cylindri recti æqualis eſt rectangulo ſub latere BC, & baſeos peripheria contento.* Fig. 5. & 6.

Dupla BC (ut oſtenſum ſupra) eſt ad GH, ut GH ad BA, ſeu AN; hoc eſt, ut *n* peripheria P ad peripheriam BN. Ergo triangulum ſub prima, nempe dupla BC, & quarta, nempe peripheria BN æquatur *p* triangulo ſub ſecunda GH, & tertia, peripheria ſcilicet P. Sed triangulum ſub GH, & peripheria P æquale *q* eſt circulo GPH; hoc eſt, *r* ſuperficiei cylindricæ. Ergo etiam triangulum ſub dupla BC, & peripheria BN (hoc eſt, *ſ* rectangulum ſub BC, & peripheria BN) cylindricæ ſuperficiei æquale erit. Quod erat demonſtr.

n Per 7. hujus.
p Patet ex 16. l. 6.
q Per 5. hujus.
r Per 11. hujus.
ſ Patet ex 41. l. 1.

Ex hoc corollario manifeſtum eſt rectangulorum proprietates ſuperficiebus cylindricis rectis eſſe

com-

communes: Eſto igitur corollarium:

Fig. 20. & 21. l. 12. 2 Cylindricæ ſuperficies (BM, QN) æque altæ ſunt inter ſe, ut baſium diametri (BF, QR.)

Nam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & rectis æqualibus FM, RN comprehenſa, quibus cylindricæ ſuperficies *d* ſunt æquales, ſunt inter ſe *e* ut baſes peripheriæ, videlicet CL, SE, hoc eſt *f* ut diametri BF, QR.

d Per corol. 1. *e* Per 1. 1. 6. *f* Per 7. hujus.

Fig. 23. & 24. l. 12. 3 Cylindricæ ſuperficies (CI, AR,) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe ut altitudines (TI, BR.)

Rectangula enim ſub æqualibus per hyp. peripheriis GH, MQ, & lateribus TI, BR contenta, quibus ſuperficies *g* cylindricæ ſunt æquales, ſunt inter *i* ſe, ut TI, BR.

g Per corol. 1. *i* Per 1. 1. 6.

Fig. 20. & 21. l. 12. 4 Similes cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem habent duplicatam ejus, quam habent baſium diametri (BF, QR.)

Cum cylindri ponantur ſimiles, erit MF ad IQ, *o* ut BF ad QR, hoc eſt, *p* ut peripheria CL ad peripheriam SE. Quare etiam rectangula ſub peripheriis CL, SE, & lateribus MF, IQ contenta ſimilia erunt, ac proinde rationem inter ſe habebunt *l* duplicatam ejus, quam habet MF ad IQ; hoc eſt BF ad QR. Ergo & cylindricæ ſuperficies &c.

o Defin. 4. l. 12. *p* Per 7. hujus. *l* Per 20. l. 6.

Fig. ead. 5 Cylindricæ ſuperficies (BM, RI) rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (FM, IQ,) & diametrorum (BF, QR,) quæ ſunt in baſibus.

Fig. 24. & 25. l. 12. 6 Si æquales ſunt cylindricæ ſuperficies (AR, FD,) erit ut diameter AB ad diametrum FN, ita reciproce altitudo FH ad altitudinem RB, & e converſo.

7 Denique ex eodem 1. coroll. habetur cylindricæ

dricæ ſuperficiei dimenſio, ſi nimirum altitudo ducatur in baſeos peripheriam, ut ſi altitudo ſit pedum 20, peripheria baſis pedum 6; multiplica 20 per 6, proveniunt 120 pedes quadrati pro cylindrica ſuperficie.

PROPOSITIO XII.

Cylindri recti ſuperficies eſt ad baſim (ABN,) ut cylindri latus (CB) ad (BO) quartam partem diametri baſeos. Fig. 6. & 5.

Sit GH media proportionalis inter BC, & BD diametrum baſis, ac proinde etiam media *a* proportionalis inter BA, ſeu AN, & duplam BC. Circulus GPH radii GH æquatur curvæ ſuperficiei *b* cylindricæ CD. Sed circulus GPH ad cylindri baſim ABN rationem habet duplicatam *c* rationis GH ad AN; hoc eſt *d* eandem, quam dupla BC ad BA radium; hoc eſt eandem, quam BC ad BO quartam diametri partem. Ergo etiam ſuperficies cylindrica eſt ad baſim ABN, ut BC ad BO quartam partem diametri BD. Quod erat demonſtrandum.

a Per lem. ante p. 11. hujus. *b* Per 11. hujus. *c* Per 2. l. 12. *d* Per hy. & defin. 10. l. 5.

Corollarium.

Superficies cylindri habentis latus diametro baſis æquale, baſeos quadrupla eſt. Si vero latus fuerit quarta pars diametri baſeos, ſuperficies cylindri baſi æqualis erit. Utrumque ex propoſitione manifeſtum eſt.

PROPOSITIO XIII.

Circulus, cujus radius (OL) eſt medius proportionalis inter coni recti latus (BC,) & baſis radium (AC,) æqualis eſt ſuperficiei conicæ. Fig. 9. & 8.

In-

Intelligantur circulis ACG, OPL circumſcripta eſſe polygona ordinata EF, IN, & ſuper polygono EF erectam eſſe pyramidem cono circumſcriptam.

Quoniam per hyp. AC, ſeu AG eſt ad OL, ut OL ad BC, erit ratio AG ad BC duplicata
a Defin. 10. l. 5. *a* rationis AG ad OL. Sed ut AG ad BC, ita triangulum ſub AG, & ambitu EF eſt ad triangulum ſub BC, & eodem ambitu EF. Ergo ratio trianguli ſub AG, & ambitu EF ad triangulum ſub BC, & eodem ambitu eſt etiam duplicata rationis AG ad OL. Sed triangulum ſub
b Per 4. hujus. AG, & ambitu EF æquale eſt *b* polygono EF, & triangulum ſub BC, & eodem ambitu EF æ-
c Per 9. hujus. quale *c* eſt ſuperficiei pyramidis circumſcriptæ. Ergo ratio polygoni EF ad ſuperficiem pyramidis etiam eſt duplicata rationis AG ad OL. Atqui etiam ratio polygoni EF ad polygonum ſibi
d Per 1. l. 12. per conſtr. ſimile IN eſt duplicata *d* rationis AG ad OL. Ergo polygonum EF ad ſuperficiem pyramidis, & ad polygonum IN eandem habent
e Per 9. l. 5. rationem, quæ proinde æqualia *e* erunt. Eodem modo oſtendam ſuperficies pyramidum, quæ cono in infinitum magis magiſque polygonæ circumſcribi poſſunt, ſemper æquales eſſe polygonis, quæ circulo OPL poſſunt circumſcribi etiam in infi-
f Per 19. hujus. nitum. Quare, cum & pyramidum *f* ſuperficies
i Per 3. hujus. in coni ſuperficiem, & polygona in circulum
OPL tandem deſinant, etiam coni *l* ſuperficies,
l Per 1. hujus. & circulus OPL erunt æqualia. Quod erat demonſtrandum.

Ex hoc præclaro theoremate exhibetur circulus ſuperficiei conicæ æqualis.

Corol-

Digitized by Google

Corollaria.

1 R*Ecti coni ſuperficies æqualis eſt triangulo ſub coni latere (BC,) & baſeos peripheria (CG) comprehenſo.* Fig. 8. & 9.

Sit OL radius media proportionalis inter AC, & BC. Quia peripheria CG eſt ad peripheriam P, ut *a* radius AG ad radium OL; hoc eſt per hyp. ut OL ad BC, erit triangulum ſub prima, nempe peripheria CG, & ſub quarta BC *b* æquale triangulo ſub ſecunda, nempe peripheria P, & tertia OL; hoc eſt *c* circulo OPL, hoc eſt *d* ſuperficiei conicæ BCD. Quod erat demonſtrandum. *a* Per 7. hujus. *b* Patet ex 16.l.6. *c* Per 5. hujus. *d* Per hanc 13.

Ex hoc corollario liquet ſuperficies conicas triangulorum ſubire leges. Itaque

2 Superficies conicæ BAF, QXR æqualia latera, BA, QX habentes ſunt inter ſe, ut baſium diametri BF, QR. Fig. 20. & 21. l. 12.

3 Et (CFT, AZB,) quæ baſes habent æquales, ſunt inter ſe, ut latera (CF, AZ.) Fig. 23. & 24. l. 12.

4 Et, quæ ſimiles ſunt (BAF, QZR,) duplicatam habent rationem ejus, quæ eſt inter baſium diametros. Fig. 20. & 21 l. 12.

5 Et quælibet rationem inter ſe habent compoſitam ex rationibus laterum (BA, QZ,) & diametrorum (BF, QR,) quæ ſunt in baſibus. Fig. ead.

6 Et, quæ æquales ſunt, reciprocant latera, & baſium diametros; & quæ reciprocant, ſunt æquales.

Quæ omnia demonſtrantur ex coroll. 1. ut ſupra corollaria de cylindrica ſuperficie deduximus ex corollario iſthic primo.

7 Metiemur denique conicam ſuperficiem, ſi latus Fig. 25. l. 12.

FC

FC per baſeos peripheriam dimidiam multiplicemus. Ut ſi latus ſit pedum 5, peripheria baſeos pedum 10, duc 5 per 10, proveniunt 50 pedes quadrati pro conica ſuperficie. Dem. patet ex eodem 1. coroll.

PROPOSITIO XIV.

Fig. 8. & 9. Archi. *Coni recta ſuperficies eſt ad baſim, ut latus (BC) ad baſis radium (AC.)*

Inter latus BC, & baſis radium AC ſit media proportionalis OL. Ergo ratio BC ad AC eſt duplicata *e* rationis OL ad AC. Jam circulus radii OL *f* eſt æqualis ſuperficiei conicæ CBD. Sed hujus ratio ad coni baſim ACG eſt duplicata *g* rationis OL ad AC, ac proinde eadem cum ratione BC ad AC. Ergo etiam ratio ſuperficiei conicæ CBD eſt ad baſim ACG, ut BC ad AC. Quod erat dem.

e Defin. 10. l. 5.
f Per 13. hujus.
g Per 2. l. 12.

Corollaria.

Fig. 27. 1 *Superficies coni recti a triangulo æquilatero circa perpendicularem KA circumacto geniti baſeos QT dupla eſt.*

Eſt enim KB latus æquale BD, adeoque duplum ſemiſſeos AB, quæ baſeos radius eſt.

Fig. 24. 2 *Superficies coni a rectangulo triangulo æquicruri EBD producta eſt ad baſim, ut in quadrato diameter ad latus.*

Ducta enim perpendiculari BA, angulus rectus B biſe-

biſecatur, adeoque ABD ſemirectus eſt; eſt autem & ADB *b* ſemirectus. Ergo DA, BA *c* æquales ſunt; ac proinde BD eſt diameter quadrati AK, latus vero AD. Eſt vero eadem AD ſemidiameter baſeos PT, cum perpendicularis AB ſecet *d* bifariam ED. Ex quibus, & hac 14 patet corollarium.

b Per corol. 11. p. 32. l. 1.

c Per 6. l. 1.

d Patet ex 26. l. 1.

3 *Superficies cylindri recti (GK) eſt ad ſuperficiem coni recti (GBN,) ut cylindri latus ad dimidium latus coni.* Fig. 24.

Nam ſuperficies coni GBN eſt ad baſim MI, ut latus BN ad *e* ſemidiametrum baſis QN; hoc eſt, ut dimidium lateris BN ad quartam partem diametri GN. Eſt autem baſis MI ad ſuperficiem cylindri GK, ut *i* quarta pars diametri ad NK cylindri latus. Ex æquo igitur ſuperficies conica GBN eſt ad ſuperficiem cylindricam GK, ut dimidium latus coni BN ad cylindri latus NK. Quod erat demonſtr.

e Per 14. hujus.

i Per 12. hujus.

Lemma ad ſequen.

IN *triangulo NPV ducta ſit QD parallela ad NV. Dico rectangulum ſub PN, & NV æquari rectangulo ſub QP, QD una cum rectangulo ſub NQ, & duabus ſimul ſumptis NV, QD.* Fig. 10.

Duc lateri NP perpendicularem NA æqualem NV, completoque NO rectangulo, ducatur diameter PA. Tum ex Q parallela QE ad NA ſecet PA in B. Per B ducatur CF parallela ad NP. Quoniam AN eſt par NV, patet etiam *a* QB eſſe parem QD. Igitur rectangulum ON eſt rectang. PNV, & FQ eſt PQD. Reſtat, ut

a Ex corol. 1. p. 4. l. 6. & ex 11. l. 5.

ut probemus rectangula OB, EC, BN æquari rectangulo ſub NQ, & duabus NA, QB, hoc eſt ſub NQ, & duabus NV, QD. Id vero eſt manifeſtum: rectangulum enim ſub NQ, & NA,
b Per 1. l. 2. QB æquatur *b* his tribus rectangulis ſub NQ, & CA (hoc eſt ſpatio EC,) ſub NQ, & NC (hoc eſt ſpatio BN) ſub NQ, & QB (hoc eſt rurſum ſpatio BN,) ac proinde ſpatio OB, quod ipſi
c Per 43. l. 1. BN *c* æquale eſt. Liquet ergo propoſitum.

PROPOSITIO XV.

Fig. 11. & 12. *SI conus rectus ſectus ſit plano QSR baſi NZO parallelo, dico circulum GHM, cujus radius GH eſt medius inter partem lateris NQ, & circulorum QSR, NZO radios QD, NV ſimul ſumptos, æqualem eſſe ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos QSR, NZO interceptæ.*

Inter PN, & NV media ſit GF. Item inter PQ, & QD ſit media GK, deſcribanturque
b Per 13. hujus. circuli GFL, GKT. Erit hic *b* æqualis ſuperficiei conicæ QPR, ille ſuperficiei *c* NPO. Re-
c Per eand. ctangulum PNV æquatur *d* rectangulo PQD
d Per lem. una cum rectangulo ſub NQ, & NV, QD ſimul ſumptis. Sed quia *e* GF media eſt propor-
e Per conſt. tionalis inter PN, NV, rectang. PNV eſt æqua-
f Per 17. l. 6. le *f* quadrato GF; & quia GK eſt *i* media inter PQ, QD, rectang. *l* PQD æquatur quadrato
i Per conſt. GK: & quia GH media *m* eſt inter QN, &
l Per 17. QD, NV ſimul ſumptas, rectangulum ſub QN,
m Per hyp. & QD, NV ſimul ſumptis æquale eſt *n* quadra-
n Per 17. l. 6. to GH. Ergo quad. GF par quoque eſt quadratis, GH, GK. Ergo cum circuli ſint inter ſe
o Per 2. l. 12. ut *o* quadrata radiorum, erit quoque circulus

GFL

GFL æqualis duobus circulis GKT, & GHM. Atqui circulus GFL eſt æqualis *p* ſuperficiei conicæ NPO. Ergo etiam ſuperficies conica NPO, æquatur duobus circulis GKT, & GHM. Atqui ſuperficiei NPO pars una QPR *r* æqualis eſt circulo GKT. Ergo reliqua inter parallelos circulos ZZ, SS comprehenſa æquatur circulo GHM. Quod erat demonſtrandum. *p* Per 12. huius. *r* Per eand.

Lemma ad ſequen.

R*ECTÆ* (*BH*, *CG*,) *quæ in circulo æquales arcus* (*BC*, *HG*) *intercipiunt*, *ſunt parallelæ.* Fig. 13.

Ducatur enim CH. Quoniam arcus BC, HG per hyp. ſunt æquales, etiam *a* anguli BHC, GCH alterni æquales erunt. Ergo *b* BH, & CG ſunt parallelæ. Quod erat demonſtr. *a* Per 29. l. 3. *b* Per 28. l. 5.

PROPOSITIO XVI.

I*Nſcribatur circulo figura regularis parilatera, & æquilatera, ducaturque EB ab extremitate diametri ad B terminum lateris diametro proximi; angulos vero æqualiter diſtantes ab A, jungant rectæ BH, CG, DF.* Fig. 13.

Dico, rectangulum, quod diametro AE, & ſubtenſa EB continetur, æquari rectangulo, quod fit ex latere uno figuræ inſcriptæ (*AB*, *vel BC &c.*) *& ex omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis.*

Duc CH, DG: quoniam BH, CG, DF intercipiunt arcus *a* æquales BC, HG, CD, GF; erunt *b* parallelæ. Pari argumento parallelæ ſunt *a* Per 26. l. 3. *b* Per lemm. præc.

c Per 27. & 25.l.1. BA,CH,DG,EF. Omnia igitur triangula c BAK, KHL, LCM, MGN, NDO, OFE æquiangula ſunt. Ergo d ut BK ad KA, ſic HK ad KL; & ut HK ad KL, ſic CM ad ML; & ut CM ad ML, ſic GM ad MN; & ut GM ad MN, ſic DO ad ON; & ut DO ad ON, ſic FO ad OE. Ergo e ut una antecedentium BK ad unam conſequentium KA, ſic omnes antecedentes BK, KH, CM, MG, DO, OF (hoc eſt omnes jungentes BH, CG, DF) ſunt ad omnes conſequentes AK, KL, LM, MN, NO, OE, hoc eſt ad diametrum AE. Sed ut BK ad i AK. ſic EB ad BA. Ergo ut omnes ſimul BH, CG, DF ad AE, ſic EB eſt ad BA. Ergo rectangulum ſub omnibus jungentibus BH, CG, DF, & ſub BA æquatur rectangulo ſub AE, & EB. Quod erat demon.

d Per 4. l.6. e Per 12. l.5. i Per 8. l.6. l Per 16. l.6.

PROPOSITIO XVII.

Fig.14. *SEgmento circuli DAF, cujus baſis DF perpendicularis ſit diametro AOE, inſcribatur figura æquilatera, & parilatera, ducaturque, ut in præcedenti recta EB.*

Dico, rectangulum ſub EB, & parte diametri AO, quæ ſegmenti axis eſt, comprehenſum æquari rectangulo ſub latere uno figuræ inſcriptæ, & omnibus jungentibus BH, CG una cum DO dimidio baſis DF ſimul ſumptis comprehenſo.

Demonſtratio eadem, quæ præcedentis.

Lemma 1. *ad ſequen.*

INſcripta ſit ſphæræ maximo circulo figura regularis, cujus latera quaternarius metiatur, circa axem AE conſiſtens, quo manente circulus cum figura circumagatur. Fig. 13.

Dico ſphæræ inſcriptum iri corpus conicis rectis ſuperficiebus contentum.

Quod BA, HA, item DE, FE deſcribant integras conorum rectorum ſuperficies, manifeſtum *o* eſt. Deinde, quia lineæ CB, GH; & GF, CD concurrunt productæ in eodem utrimque puncto diametri AE ſimiliter pertractæ, quæ jungentes ſecat normaliter, etiam liquet has deſcribere partes ſuperficierum rectarum conicarum interceptas inter parallelos circulos, quos in ſphærica ſuperficie deſcribunt vertices angulorum B, C, D. *o* Vide defin. 2. l. 12.

Lemma 2.

SEgmenti ſphæræ, cujus axis AO, ſectio maxima eſto DAF. Huic inſcripta ſit figura æquilatera dempta baſi, quæ circa axem AO in orbem convertatur. Fig. 14.

Dico ſegmento ſphærico inſcriptum iri corpus conicis ſuperficiebus contentum.

Probatur, ut lemma præced.

PROPOSITIO XVIII.

POnantur eadem, quæ in primo lemmate. Et ducatur recta EB ab extremitate diametri ad termi- Fig. 13.

minum lateris diametro proximi.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius (I) poteſt a rectangulum AEB comprehenſum videlicet ſub diametro AE, & ſubtenſa EB.

a Potentia rectæ eſt quadratum ejus.

b Per 17. l.6.

Hoc eſt *b* cujus radius (I) eſt medius proportionalis inter AE, & EB.

c Per 1. l.2.

Quoniam rectæ BH, CG, DF æquantur rectis Bk, CM, DO bis ſumptis, erit *c* rectangulum ſub latere imo figuræ inſcripto maximo circulo (videlicet ſub AB, vel BC, vel CD, vel DE) & ſub omnibus ſimul jungentibus BH, CG, DF æquale rectangulo ſub AB, & Bk, ſub BC, & compoſita ex Bk, & CM, ſub CD, & compoſita ex CM, & DO, ſub DE, & DO; ſic enim rectæ B k, C M, D O ſingulæ fuerunt bis acceptæ. Atqui rectangulum ſub A B, & omnibus jungentibus BH, CG, DF ſimul ſumptis æquatur *d* rectangulo AEB, hoc eſt *e* quadrato I. Ergo quadratum I æquale eſt rectangulis ſub AB, & Bk; ſub BC, & compoſita ex Bk CM; ſub CD, & compoſita ex CM, DO; ſub DE, & DO. Sint jam inter AB, & Bk media proportionalis P: inter BC, & compoſitam ex Bk, CM media Q: inter CD, & compoſitam ex CM, DO media R: inter DE, & DO media S. Erunt igitur quadrata P, Q, R, S æqualia *f* rectangulis ſupradictis. Quare cum quadratum I jam oſtenderim iiſdem æquari rectangulis, etiam quadratis P, Q, R, S æquale erit. Cum igitur circuli ſint inter ſe *g* ut quadrata radiorum, etiam circulus radio I deſcriptus omnibus ſimul circulis, quorum radii P, Q, R, S, æqualis *i* erit. Atqui circuli radiorum P, & S æquantur *l* ſuperficiebus conicis, quas pro-

d Per 16. hujus.
e Per hyp.
f Per 17. l.6.
g Per 2. l.12.
i Patet ex 22.l.6. & 24.l.5.
l Per 13. hujus.

produxerunt latera AB, ED; ſiquidem P eſt media proportionalis inter A B coni latus, & Bk radium baſeos; S vero media eſt inter ED, & DO; & circulus radii Q eſt æqualis ſegmento *a* ſuperficiei conicæ, quæ intercipitur inter duos parallelos circulos diametrorum CG, BH, quia Q media eſt inter B C, & compoſitam ex Bk, CM; & ob eandem cauſam circulus radii R æquatur ſegmento ſuperficiei conicæ inter parallelos circulos diametrorum CG, DF interceptæ. Ergo circulus radio I deſcriptus æquatur omnibus ſimul conicis ſuperficiebus ſphæræ inſcriptis. Quod erat dem. *a* Per 15. hujus.

PROPOSITIO XIX.

Ponantur eadem, quæ in 2. lemmate, & ducatur recta EB ab extremitate diametri AE ad terminum lateris AB diametro proximi. Fig. 14.

Dico omnibus ſuperficiebus conicis ſegmento ſphærico DAF inſcriptis æqualem eſſe circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & ſegmenti axem AO.

Demonſtratio plane eadem, quæ præcedentis; ſed pro P. 16. citetur P. 17.

PROPOSITIO XX.

Superficies conicæ ſphæræ inſcriptæ in ſphæræ ſuperficiem deſinunt. Fig. 15.

Data ſit ſuperficies quantumvis parva X: manifeſtum eſt intra ſphæricam ſuperficiem ACEG dari aliam poſſe concentricam, quæ ab hac deficiat

quantitate minori, quam ſit X. Ambarum plano ſectarum per centrum maximi circuli ſint ACEG, DPLM. Ducatur diameter ADE, & in D tangat NQ. Si arcus ACE biſecetur in C, & reſiduum biſecetur rurſus, & ſic deinceps, re-
a Patet ex lem. 2. ſchol. poſt 11. l.6. linquetur *a* tandem arcus AB minor arcu AN; huic ſi ſubtendatur recta AB, manifeſtum eſt, eam non pertingere ad peripheriam PDML, eſſeque latus figuræ æquilateræ, & parilateræ circulo CAGE inſcriptæ, cujus nullum latus pertingat ad peripheriam PDML. Quare ſi circa diametrum AE in orbem agantur omnia, patet, ſuperficiei ſphæricæ exteriori inſcribendas eſſe conicas ſuperficies, quæ includant ſuperficiem ſphæricam alteri concentricam, ac proinde illa ſint *b*
b Per axio.3. hujus. majores. Quoniam igitur ſphærica ſuperficies DPLM, deficit a ſuperficie ſphærica ACEG quantitate minori, quam ſit data X; multo magis ſuperficies conicæ ab eadem ſphærica ACEG deficient quantitate minori, quam ſit data X, ac
c Defi.6. l.12. proinde *c* in ACEG ſuperficiem deſinent. Quod erat demonſtr.

PROPOSITIO XXI.

Fig. 17. *Conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico DAF inſcriptæ in ipſam ſegmenti ſphæricam ſuperficiem deſinunt.*

Demonſtrabitur eodem fere ratiocinio, quo præcedens.

PROPOSITIO XXII.

Demonſtratum eſt propoſ. 18, *circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter diametrum AE, & rectam EB, quæ ab extremitate diametri ducitur ad terminum lateris AB diametro proximi, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis ſphæræ inſcriptis.* Fig. 16.

Dico hunc circulum deſinere o *tandem in circulum, cujus radius eſt AE ſphæræ diameter.* o V. def. 6. l. 12.

Nam ſi plura ſemper, ac plura in infinitum latera circulo maximo inſcribantur, (quæ deinde circa AE in orbem acta conicas producunt ſuperficies) patet latus AB fieri tandem quavis data recta minus; ac proinde ſubtenſam EB ad diametrum AR accedere ad intervallum etiam quovis dato minus, unde fit, ut differentia ipſarum AE, BE etiam fiat quavis data minor. Ergo multo magis media proportionalis inter AE, BE; quæ ſemper major eſt, quam BE, differet ab AE, tandem defectu minori quocunque dato. Ergo etiam circulus, cujus ſemidiameter eſt media inter AE, & BE, a circulo, cujus radius eſt AE, tandem differet defectu minori quocunque dato, hoc eſt in *i* ipſum deſinet. Quod erat demonſtrandum. *i* Def. 6. l. 12.

Hæc per ſe ſatis clara non eſt neceſſe operoſius demonſtrare.

PROPOSITIO XXIII.

Fig. 17. *Demonſtratum eſt propoſ. 19, circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & AO ſegmenti axem, æqualem eſſe omnibus ſuperficiebus conicis portioni ſphæricæ DAF inſcriptis.*

Dico hunc circulum deſinere in circulum, cujus radius eſt recta AD a ſegmenti vertice ducta ad peripheriam circuli DQFN, qui baſis eſt ſegmenti.

Nam, quia jam ex præced. demonſt. liquet EB deſinere tandem in AE, patebit quoque, mediam proportionalem inter EB, & AO deſinere tandem in mediam proportionalem inter AE, & AO, *n* hoc eſt in ipſam AD. Manifeſtum eſt igitur, & circulum, cujus radius eſt medius proportionalis inter EB, & AO, etiam deſinere in circulum radii AD. Quod erat demonſtrandum.

n Per corol. 2. pr. 8. l. 6.

Lemma ad ſequen.

Si diameter diametri dupla eſt, circulus circuli quadruplus erit.

Patet ex propoſ. 2. lib. 12. & defin. 10. lib. 5.

PROPOSITIO XXIV.

Fig. 16. *Cujuſcunque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli ejuſdem ſphæræ.*

Hoc nobiliſſimum Archimedis theorema ex jam præmiſſis expedite demonſtrabimus hunc in modum.

Circu-

Circulo ſphæræ maximo circa diametrum AE intelligatur inſcripta eſſe figura ordinata, cujus latera quaternarius metiatur, quæ circa AE in orbem ducta producat conicas ſuperficies ſuperficiei ſphæricæ inſcriptas, ducaturque EB. Demonſtratum jam ſupra *a* eſt, omnes conicas ſuperficies ſphæræ inſcriptas æquales eſſe circulo, cujus radius poteſt rectangulum AEB, hoc eſt cujus radius eſt medius proportionalis inter AE, & EB. Atque hoc ſemper eveniet inſcriptionibus in infinitum continuatis. Quare cum inſcriptæ conicæ ſuperficies, *b* tandem deſinant in ſphæricam ſuperficiem; circulus vero, cujus radius eſt medius inter AE, & EB, deſinat *c* in circulum, cujus radius AE, ipſa quoque ſphærica ſuperficies *d* æqualis erit circulo radii AE, hoc eſt *e* quadruplo maximi circuli ACEG. Quod erat demonſtrandum.

a Per 18. hujus.
b Per 20. hujus.
c Per 22. hujus.
d Per 2. hujus.
e Per lemm. præc.

Viam, qua in theoremate nobiliſſimo demonſtrando hactenus uſi ſumus, Archimedæa multo breviorem, & clariorem eſſe ſciet, qui Archimedem legerit.

Corollarium.

EX hoc præclaro, atque admirabili theoremate, quo immortale nomen Archimedes apud omnes Geometras conſecutus eſt, exhibetur circulus æqualis ſuperficiei ſphæricæ, is nimirum, cujus ſemidiameter eſt ſphæræ diameter, ſive cujus diameter dupla eſt diametri ſphæræ.

Scholium.

EXpedita jam erit dimenſio ſuperficiei ſphæricæ principis inter omnes curvas. Duplex eſt modus.
1. Menſuretur circulus ſphæræ maximus (ut traditur

ditur in Scholio poſt P. 6. hujus.) Et multiplicetur per 4. Ut ſi maximus orbis terræ circulus inventus ſit continere quadrata milliaria unius horæ, ſive Belgica 5, 940, 000; hic numerus quadruplicatus exhibet quadrata milliaria Belgica 23, 760, 000, quæ in ſuperficie orbis terræ continentur.

2. Diameter ſphæræ multiplicata per circumferentiam maximi circuli exhibet ſphæræ ſuperficiem. Ut ſi terræ diametro dentur milliaria unius horæ $2750\frac{14}{71}$, *atque inde maximi circuli circumferentia eliciatur milliariorum 8640: hi duo numeri, omiſſa fractione, multiplicati per invicem, dabunt rurſum quadrata milliaria unius horæ 23, 760, 000, totam orbis terræ ſuperficiem conſtituentia.*

Demonſtratio patet ex primo Corollario, prop. 5. hujus; rectangulum enim ſub diametro ſphæræ, & maximi circuli circumferentia per dictum Corollar. eſt quadruplum maximi circuli.

PROPOSITIO XXV.

Fig. 17. *Cujuſcunque portionis ſphæricæ (DAF) ſuperficies æqualis eſt circulo, cujus radius eſt recta (AD) a vertice portionis ducta ad circumferentiam circuli (DQFN) qui portionis eſt baſis.*

Portionis maximæ ſectioni inſcripta cogitetur circa axem AO figura æquilatera, & parilatera baſi dempta, quæ circa AO in orbem acta portioni inſcribet conicas ſuperficies. Ducatur quoque recta EB, ut *o* ſupra. Omnes conicæ ſuperficies ſegmento ſphærico jam inſcriptæ æquantur *a* circulo, cujus radius eſt medius proportionalis

o In 18. & 19. hujus.
a Per 19. hujus.

lis inter E B , & ſegmenti axem A O . Atque hoc multiplicatis in infinitum inſcriptionibus ſemper continget . Quare cum & conicæ ſuperficies ſegmento inſcriptæ deſinant *b* in ſphæricam ſegmenti ſuperficiem , & circulus , cujus radius inter EB , & A O medius eſt , deſinat *c* in circulum radii AD , etiam *d* ſphærica portionis ſuperficies DAF circulo radii A D æqualis erit . Quod erat demonſtrandum .

b Per 21. hujus. *c* Per 23. hujus. *d* Per 24. hujus.

Hoc alterum eſt ex Archimedis inventis nobilioribus, quod perinde ac præcedens, via multo, quam ipſe, breviori, ac clariori jam demonſtravimus.

PROPOSITIO XXVI.

Cylindri recti ſphæræ circumſcripti (HPSV) ſuperficies æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ. Fig. 18.

Et ſi cylindrus, ac ſphæra ſecentur planis ad axem (BG) rectis , erunt ſingula ſuperficiei cylindricæ ſegmenta ſegmentis ſingulis ſuperficiei ſphæricæ æqualia .

1. Pars . Quoniam cylindri latus H P æquale eſt *o* PS diametro baſis , erit cylindrica ſuperficies HS , quadrupla *a* baſeos , hoc eſt maximi circuli ſphæræ cylindro inſcriptæ, cujus cum etiam *b* quadrupla ſit ſphæræ ſuperficies , erit hæc æqualis cylindricæ. Quod erat demonſtrandum .

o Per hyp. *a* Per coroll. pr. 12. hujus. *b* Per 24. hujus.

2 Pars. Ducantur rectæ BO, GO . Quoniam angulus BOG *i* rectus eſt in ſemicirculo, ab eoque cadit O C perpendicularis ad B G, erit *c* BO media proportionalis inter GB , & BC, hoc eſt inter I T, & H I. Ergo circulus radii BO *d* æqualis eſt ſuperficiei cylindricæ H T: Sed idem circulus æqualis eſt *e* etiam ſegmento ſu-

i Per 31. l. 3. *c* Per coroll. 2. p. 8. l. 6. *d* Per 15. hujus. *e* Per præc.

ſuperficiei ſphæricæ OBK. Æquales igitur ſunt ſuperficies cylindrica HT, & ſphærica OBK.

Deinde, quia eodem modo oſtenditur cylindrica HX æquari ſphæricæ QBR, etiam reliqua cylindrica IX reliquæ ſphæricæ QOKR inter duos parallelos circulos interceptæ æqualis erit.

Ex his patet de ſegmentis omnibus.

PROPOSITIO XXVII.

Fig. 18. *SEgmenta ſuperficiei ſphæricæ parallelis circulis diviſa eam inter ſe proportionem habent, quam ſegmenta diametri (BC, CD, DA, AE, EF, FG) ad circulos parallelos recta.*

Sequitur ex præcedenti. Sunt enim ſphæricæ ſuperficiei ſegmenta OBK, QOKR, MQRN, &c. *a* æqualia cylindricis HT, IX, LN, &c. Atque hæc eandem inter ſe rationem habent, *b* quam axeos ſegmenta BC, CD, DA, &c. Ergo & illa. Quod erat demonſtrandum.

a Per præced.

b Per 13. l. 12.

Scholium.

EX hac innoteſcit proportio zonarum, & climatum inter ſe. Sunt enim ad invicem, ut ſegmenta axis, quæ nota fiunt ex tabula ſinuum.

Ex eadem habetur dimenſio ſegmentorum ſuperficiei ſphæricæ. Nam, quia & tota ſphæræ ſuperficies nota eſt ex Scholio Propoſit. 24. & ſegmentorum proportio, utpote eadem, quæ partium axis, etiam datur, liquet ſegmenta ſingula innoteſcere.

Cæterum & quatuor præcedentia theoremata, & reliqua omnia, quæ ſequuntur, omnino ſingularia,

atque

atque admiranda ſunt, planeque digna, ad quæ intelligenda Geometriæ ſtudioſi ardenti ſtudio incumbant.

Lemma ad ſequent.

SI ſphæram tangat planum (QN in O) recta (AO) ex centro ad contactum ducta eſt plano tangenti perpendicularis. Fig. 19.

Secentur planum tangens QN, & ſphæra per tactum O duobus planis, quæ in ſphæra quidem producant circulos OG, OB; in plano autem QN rectas CO, IO, quæ circulos contingent in O. Igitur per 18. lib. 3. AO perpendicularis eſt ad utramque IO, CO, ac proinde per 4. l. 11. recta plano QN. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXVIII.

OMnis ſphæra æqualis eſt cono (ZO) cujus altitudo (KO) par eſt radio ſphæræ, baſis vero (Z) ſuperficiei ſphæræ æqualis. Fig. 20, 21. & 22.

Intelligatur ſphæræ circumſcriptum eſſe corpus aliquod polyedrum, cujus ſolidi anguli novis planis ſphæram tangentibus abſcindantur. Quo facto orietur aliud corpus polyedrum ſphæram continens minus priore, & pluribus conſtans angulis, & ſuperficiem habens ex pluribus, ac minoribus planis tangentibus compoſitam. Si polyedri hujuſmodi anguli novis planis tangentibus iterum abſcindantur, & tertii polyedri inde nati ſimiliter, atque ita in infinitum; fiet tandem, ut

& po-

& polyedrum excedat ſphæram ſolido minori quocunque dato, & ſuperficies ejus ex planis tangentibus (quæ, ut dixi, ſine termino & minora, & plura erunt) compoſita ſphæricam ſuperficiem excedat quoque plano minori dato quocunque. Quod utrumque, licet demonſtrari poſſet, tamen, quia per ſe ſatis clarum, poſtuletur ſtudio brevitatis. His ita conſtitutis quæſitum ita concludemus.

Polyedrum jam expoſitum componitur ex pyramidibus, quarum vertex communis eſt centrum ſphæræ, baſes vero ſunt plana tangentia, quæ polyedri ſuperficiem conſtituunt. Et quia rectæ ex centro A ad ſingulorum planorum contactus ductæ ad plana *a* ſingula perpendiculares ſunt, erunt omnium pyramidum, quibus conſtat polyedrum, æqualis altitudo, ipſe nimirum A B radius ſphæræ. Si jam igitur planum X ponatur æquale ſuperficiei ipſius polyedri, ſuperque eo erecta ſit pyramis ad altitudinem M N etiam æqualem ſphæræ radio AB, manifeſtum eſt *b* omnes pyramides ſupradictas, hoc eſt totum polyedrum æquari pyramidi X N. Ad eundem modum reliqua omnia polyedra ſphæram includentia, quæ ex truncatione perpetua ſingulorum angulorum, alia, atque alia naſcentur in infinitum, ſemper æqualia erunt pyramidibus per XN repræſentatis, quarum altitudines MN ſunt radius ſphæræ, baſes vero X æquales ſuperficiebus polyedrorum ſphæram ambientibus. Quare cum tandem & polyedra (ut dixi ſupra) in ſphæram, & pyramides XN (ut mox oſtendam) in conum ZO deſinant, etiam *c* ſphæra cono æqualis erit. Quod erat demonſtrandum.

Quod autem pyramides X N *d* deſinant in conum ZO ſic oſtendo. Polyedrorum ſuperficies deſinunt

a Per le. præc.

b Per 6. l. 12.

c Per 1. hujus.

d Defin. 6. l. 12.

ſinunt in ſphæræ ſuperficiem, ut poſtulatum ſupra. Atqui baſes X pyramidum XN ſemper æquales ponuntur ſuperficiebus polyedrorum, & Z baſis coni ZO per hyp. æqualis eſt ſuperficiei ſphæræ, ergo etiam baſes X deſinent in baſim Z; ac proinde cum pyramides XN ſint ad conum ex hyp. æque altum, ut *e* baſis X ad baſim Z, etiam pyramides in conum deſinent. *e* Per cor.p.11. l. 12.

Demonſtratio jam allata hujus propoſitionis, & ſequentis penitus diverſa eſt ab ea, qua uſus eſt Archimedes, quæ quidem valde ſubtilis, & ingenioſa eſt, ſed prolixa, & ardua, ad quam videlicet adhibentur duo manifeſta, & propoſitiones undecim præter alias non paucas, a quibus illæ dependent. Ipſum vero theorema ab Archimede proponitur hunc in modum: Omnis ſphæra quadrupla eſt coni baſim habentis æqualem maximo circulo ſphæræ, altitudinem vero radium.

Scholium.

Ex hoc prænobili theoremate figuræ inter corporeas nobiliſſimæ elicitur dimenſio. Nam ſi diametri ſexta pars, ſive tertia ſemidiametri multiplicetur per ſphæræ ſuperficiem jam notam per ſcholium prop. 23, proveniet ſphæræ ſoliditas.

Inventa ſit ſphæræ terreſtris ſuperficies continere quadrata unius horæ milliaria 23,760, 000, *& ſemidiameter eſto milliarium horariorum* 1375, *cujus tertia pars eſt* 458 $\frac{1}{3}$. *Multiplica* 458 *omiſſa fractione per* 23,760, 000, *provenient* 10, 882, 080, 000 *cubica unius horæ milliaria pro ſoliditate orbis terræ.*

Cum enim ſphæra ſit æqualis a *cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſuperficies ſphæræ; coni* *a* Per hanc 28.

S *autem*

b Per ſchol.p. 6.hujus. *autem ſoliditas* b *producatur ex parte tertia altitudinis (hoc eſt radii ſphæræ) ducta in baſim, (hoc eſt in ſphæræ ſuperficiem) etiam ſphæræ ſoliditas obtinebitur ex tertia parte radii ducta in ſuperficiem.*

PROPOSITIO XXIX.

Fig. 23. *Omnis ſector ſphæræ æqualis eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis vero ſectoris ſphærica ſuperficies.*

Esto primum ſector (AECG) hemiſphærio minor. Intelligatur ſectori circumſcriptum eſſe polyedrum corpus rectilineum. Si cætera ratiocinatio omnis ad eundem modum inſtituatur, ut in præcedenti, eodem modo concludetur quæſitum. Id ſolum oportebit oſtendere, ex quo diſcurſus totus dependet, ſuperficiem polyedri ex planis ſphæricam ſuperficiem ECG undequaque tangentibus compoſitam eſſe majorem ſuperficie ECG, quod ita fiet. Cogitetur ſuperficiei ECG apponi alia æqualis, & ſimilis, planis tangentibus eodem prorſus modo cincta, quo prior. Erit jam c Per ax. 3.hujus. tota *c* ſuperficies ex planis compoſita major tota ſphærica. Ergo etiam dimidia ex planis compoſita dimidia ſphærica ECG major erit.

Eſto deinde ſector (AEBG) major hemiſphæ- d Per præc. rio. Uterque ſector ſimul ſumptus æqualis *d* eſt cono, cujus altitudo eſt radius ſphæræ, baſis aue Patet ex 11. 1. 12. tem tota ſuperficies, hoc eſt *e* duobus conis, quorum altitudo eadem, baſes vero pares ſuperficiei ſphæricæ ſegmentis ECG, EBG. Atqui ſectorum unus AECG hemiſphærio minor per 1. partem æquatur cono, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuper-

perficies ECG. Ergo alter AEBG æquatur cono reliquo, cujus altitudo eſt radius, baſis vero ſuperficies reliqua EBG. Quod erat dem.

Corollarium.

CUm ſuperficies ECG ſit æqualis *o* circulo radii CG, & ſuperficies EBG æqualis circulo radii BG, erunt ſectores AECG, & AEBG æquales conis, quorum altitudo eſt radius ſphæræ, baſes vero circuli radiorum CG, & BG. *o* Per 25. hujus.

Scholium.

EX his habetur dimenſio & ſectorum, & ſegmentorum ſphæra, ſectorum quidem, ſi multiplicetur p *tertia pars radii per ſphæricam ſectorum ſuperficiem, jam notam ex ſcholio prop.* 27. *ſive per circulum radii CG, vel BG; ſegmentorum vero, ſi menſuretur conus EAG, & a ſectore, ſi minor eſt hemiſphario, auferatur, ſi major, eidem adjiciatur.* Fig. 23. *p* Patet ex ſchol. p.6. hujus.

Segmentum (MQRN,) quod inter duos circulos ſive parallelos, ſive non parallelos interjicitur, menſurabis, ſi ſegmenta QBR, & MBN jam nota auferantur ab invicem. Fig. 18.

PROPOSITIO XXX.

HEmiſpharium (EOBD) coni (EBD) eandem ſecum baſim, & altitudinem habentis duplum eſt. Fig. 42.

Conus, cujus baſis eſt ſuperficies hemiſphærica

 EOBD,

EOBD, altitudo autem radius AB, eſt ad conum EBD, *a* ut baſis ad baſim, hoc eſt ut ſuperficies hemiſphærica EOBD ad maximum circulum PT. Ergo cum ſuperficies hemiſphærica EOBD dupla *b* ſit maximi circuli, etiam conus pro baſi habens ſuperficiem EOBD, pro altitudine radium AB duplus eſt coni EBD. At hemiſphęrium æquatur *c* cono habenti pro altitudine radium, pro baſi ſuperficiem hemiſphęricam EOBD. Ergo etiam hemiſphærium coni EBD duplum eſt. Quod erat demonſtr.

a Per 11. l. 12.

b Per 24. hujus.

c Per 28. hujus.

PROPOSITIO XXXI.

Fig. 25.

SPhæra ſit diviſa in duo ſegmenta ILBG, ISKG, plano IQGT per centrum A non tranſeunte, diameter autem plano ſecanti recta ſit BOK.

Ut altitudo OB ſegmenti ILBG eſt ad radium ſphæræ AB, ita OK altitudo ſegmenti alterius fiat ad aliam KN.

Pari modo, ut OK altitudo ſegmenti ISKG eſt ad radium AK, ſeu AB, ita altitudo OB ſegmenti alterius fiat ad aliam BD.

Dico 1. Coni ING, & IDG, quorum altitudines ſunt ON, OD, baſis vero communis IQGT, ſegmentis ſphæricis ſunt æquales.

2 Segmentorum eadem eſt proportio, quæ rectarum DO, NO.

3 Segmentum ISKG eſt ad maximum ſibi inſcriptum conum IKG, ut NO ad KO, & ſegmentum ILBG eſt ad ſibi inſcriptum conum maximum IBG, ut DO ad BO.

Pars

Pars 1. Sphæra, & coni ſecentur plano per diametrum Bk, producentur in ſphæra circulus maximus BLkG, in conis vero triangula BIG, IkG; & quia BOk diameter *a* recta eſt circulo QT, erit angulus IOB *b* rectus. Angulus quoque BIk *c* in ſemicirculo rectus eſt. Quoniam igitur in triangulo BIk ab angulo recto ducta eſt IO perpendicularis in baſim Bk, erit BI ad IO, ut *d* Bk ad kI. Ergo ratio duplicata BI ad IO æqualis eſt rationi duplicatæ Bk ad kI; hoc eſt (quia Bk, kI, kO *f* ſunt tres proportionales) æqualis rationi Bk, kO.

a Per hyp.
b Per defin. 3. l. 11.
c Per 31. l. 3.
d Per 8. l. 6.
f Per corol. 2. p. 8. l. 6.

Deinde, quia eſt ut Ok ad radium AB, ita *o* OB ad BD; erit quoque invertendo DB ad BO, ut AB ad Ok; & permut. DB ad BA, ut BO ad Ok; & compon. DA ad BA, ut Bk ad Ok. Quoniam igitur jam oſtendi rationem Bk ad Ok duplicatam eſſe rationis BI ad IO, ac proinde æqualem *p* rationi circulorum radiis BI, IO deſcriptorum, erit quoque DA ad BA, ut circulus radii BI ad circulum radii IO. Igitur conus ſub altitudine DA, & baſi circulo radii IO, hoc eſt circulo QT æqualis eſt *g* cono ſub altitudine BA, & baſi circulo radii BI; hoc eſt *i* ſectori ſphærico AIBG. Quare ſi tam ſectori AIBG, quam cono ſub DA, & circulo QT addatur idem conus IAG, tota erunt æqualia; videlicet ſegmentum ſphæricum ILBG æquabitur duobus conis, quorum unus eſt, qui fit ſub baſi QT, & altitudine DA, alter IAG ſub eadem baſi QT, & altitudine AO. Sed hi duo coni *k* conficiunt conum IDG. Ergo ſegmentum ILBG cono IDG æquale erit. Quod erat demonſtr.

o Per hyp.
p Per 2 l. 12.
g Per 15. l. 12.
i Per corol. p. 29. hujus.
k Patet ex 14. l. 12.

Eodem diſcurſu erit ſegmentum ISkG æquale cono ING, eo ſolum mutato, ut conus IAG, qui prius addebatur, jam auferatur.

Pars 2. Patet ex prima. Nam coni IDG, & *n* Per 14. l. 12. ING ſunt inter ſe *n* ut DO, & NO. Ergo & ſegmenta ILBG, ISkG conis illis æqualia ſunt inter ſe, ut rectæ DO, NO.

Pars 3. Patet ſimiliter ex prima. Nam conus *q* Per eand. IDG eſt ad conum IBG, *q* ut DO ad BO. Ergo & ſegmentum ILBG, cono IDG æquale eſt ad conum IBG, ut DO, ad BO.

Scholium.

EX prima parte hujus theorematis habetur alia, eaque facillima ſegmentorum ſphæricorum dimenſio, ſi nimirum coni IDG, ING menſurentur, ſ VI. ſch. poſt 6. hujus. *quod fiet ſi* ſ *tertiæ partes rectarum DO, NO ducantur in circulum QT.*

PROPOSITIO XXXII.

Fig. 24. *CYlindrus rectus (GK) ſphæra, cui circumſcribitur & ſoliditate, & ſuperficie tota ſeſquialter eſt.*

Communis ſphæræ, ac cylindri axis eſto BQ, conus vero maximus hemiſphærio EOBD inſcriptus ſit EBD. Quia cylindrus Ek (ſemiſſis to- *a* Per 10. l. 12. tius Gk) triplus eſt *a* coni EBD; hemiſphærium *b* Per 30. hujus. vero *b* ejuſdem coni duplum, patet, cylindrum Ek eſſe ad hemiſphærium, ut 3. ad 2. Ergo etiam totus cylindrus Gk eſt ad totam ſphæram QEBD, ut 3. ad 2. Quod erat primum.

Deinde quia cylindri latus kN eſt æquale baſis diametro GN, erit ejus ſuperficies abſque *c* Per corol. p. 12. hujus. baſibus *c* quadrupla baſeos MI, ac proinde cum baſibus, hoc eſt tota cylindri ſuperficies erit ſecupla

cupla baſeos MI, quæ par eſt maximo ſphæræ circulo. Atqui ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt maximi circuli. Ergo tota cylindri GK ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut 6 ad 4. ſive ut 3. ad 2. Quod erat alterum.

Igitur cylindrus ſphæræ ſibi inſcriptæ ſoliditate, & tota ſuperficie ſeſquialter eſt. Quod erat demonſtrandum.

Scholium.

Quanti hoc Theorema fecerit Archimedes, argumento eſt, quod tumulo ſuo ſphæram cylindro inſcriptam apponi voluerit. Atque idcirco fortaſſe inter alia tam multa, & præclara inventa ſua hoc illi præ reliquis placuit, quod & corporum, & ſuperficierum corpora ipſa continentium eadem eſſet atque una rationalis proportio. Similem affectionum identitatem annulos inter, annulorumque ſuperficies demonſtravimus l. 4. cylindricorum, & annularium prop. 13. 14. 15. ſed & ipſa in ſphæra aliud mihi hujus rei exemplum illuſtre ſeſe obtulit. Deprehendi ſiquidem, quemadmodum ſphæra ad cylindrum rectum ſe ambientem (qui neceſſario æquilaterus erit) eſt tam ſoliditate, quam ſuperficie, ut 2. ad 3. ita ſphæram ad æquilaterum conum ſe ambientem & ſoliditate ſimiliter, & ſuperficie eam habere proportionem, quam 4. ad 9. Ex quo deinde illud conſequitur, ſeſquialteram proportionem ab Archimede in cylindro, & ſphæra repertam, in tribus ſolidis, ſphæra, cylindro, & cono æquilatero continuari. Utriuſque demonſtrationem, pluraque alia theoremata noſtra, quibus ſphæræ natura mirabilis amplius innoteſcet, tredecim ſequentibus propoſitionibus comprehenſa ſubjungam.

PROPOSITIO XXXIII.

Fig.26. *SUperficies ſphæræ dupla eſt ſuperficiei cylindri quadrati ſphæræ inſcripti.*

Quadratum maximo ſphæræ circulo inſcriptum, a quo in orbem ducto deſcribitur quadratus cylindrus, eſto AkL, ducaturque AL diameter quadrato, & ſphæræ communis. Quoniam quadratum AL par *a* eſt quadratis æqualibus Ak, kL erit duplum unius Ak. Ergo etiam circulus diametri AL duplus *b* eſt circuli, cujus diameter Ak, circuli nempe CN. Atqui ſuperficies ſphæræ quadrupla *c* eſt circuli, cujus diameter AL, is enim eſt maximus ſphæræ circulus, cum AL ſit ſphæræ diameter. Ergo ſphæræ ſuperficies octupla eſt circuli CN. Sed quia Lk, kA *d* æquales ſunt, cylindrica ſuperficies ACL quadrupla *e* eſt circuli CN. Ergo cum ſphæræ ſuperficies ejuſdem circuli octupla ſit, cylindricæ ſuperficiei dupla erit. Quod erat demonſtrandum.

a Per 47. l.1.
b Patet ex 2.l.12.
c Per 24. hujus.
d Per hyp.
e Per corol.p.12. hujus.

PROPOSITIO XXXIV.

Fig.26. *SPhæra ſuperficies ad totam cylindri quadrati ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 3.*

Ponantur eadem, quæ demonſt. præced. Quoniam cylindri latus Lk, & baſis diameter Ak *f* æquales ſunt, erit ſuperficies cylindrica CL *g* quadrupla baſis CN, ac proinde tota cylindri ſuperficies ad utramque baſim CN, & SL eſt, ut 6 ad 2

f Per hyp.
g Per corol.p.12. hujus.

6 ad 2. Atqui ſphæræ ſuperficies eſt ad utramque ſimul baſim CN, SL, ut 8 ad 2, cum in præced. oſtenſa ſit eſſe ad unam baſim, ut 8 ad 1. Ergo ſphæræ ſuperficies eſt ad cylindricam C L ſuperficiem, ut 8 ad 6, ſive ut 4 ad 3. Quod erat demonſtrandum.

Corollarium.

TOta cylindri recti ſphæræ circumſcripti ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem cylindri æquilateri inſcripti, ut 2 ad 1. Nam circumſcripta eſt ad ſphæricam, ut 12 ad 8 per 32 hujus. Sphærica autem eſt ad inſcriptam, ut 8 ad 6 per hanc. Ergo ex æquo circumſcripta eſt ad inſcriptam, ut 12 ad 6, ſive ut 2 ad 1.

PROPOSITIO XXXV.

CUjuſcunque portionis ſphæricæ ſuperficies (IL B G) ad ſuperficiem coni maximi inſcripti eam rationem habet, quam coni latus (B G) ad baſis radium (GO.) Fig. 26. vel 25.

Quoniam portionis ILBG ſuperficies *a* æqualis eſt circulo radii BG, erit proportio ejus ad circulum QT baſim nempe ſuam, & coni duplicata *b* rationis BG ad GO, hoc eſt *c* rationis ſuperficiei conicæ I B G ad baſim eandem QT. Ergo liquet, ſuperficiem I L B G eſſe ad ſuperficiem conicam IBG, ut eadem conica I B G eſt ad baſim QT. Quare cum conica I B G ſit ad ad baſim QT, *d* ut BG ad GO, etiam portionis ſuperficies erit ad conicam I B G ſibi inſcriptam, ut BG ad GO. Quod erat demonſt.

a Per 25. hujus.
b Per 2. hujus.
c Per 14. hujus.
d Per 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVI.

Fig. 24. *Hemiſphærii ſuperficies (EOBD) ad coni maximi, ſive recti inſcripti ſuperficiem (EBD) eam rationem habet, quam in quadrato diameter ad latus: ad ſuperficiem vero coni ſimilis circumſcripti, ut latus in quadrato ad diametrum.*

Fig. 6. l. 4. 1. Partis demonſtratio ex præcedenti eſt manifeſta; eſt enim portionis cujuſcunque, ac proinde & hemiſphærii ſuperficies EOBD ad conicam inſcriptam, ut BD ad DA. Eſt autem BADk quadratum, cujus diameter eſt BD, latus DA.

2. Pars. Semiſſis quadrati circulo (cujus centrum A) circumſcripti eſto EBC, qua circa axem AB circumacta gignatur conus hemiſphærio conſcriptus. Quoniam quadratum EC duplum *a* eſt quadrati EB, ſeu GI, etiam circulus diametri EC duplus *b* eſt circuli, cujus diameter GI, hoc eſt circuli HGDI. Atqui *c* ſuperficies hemiſphærii cono EBC incluſi ejuſdem circuli dupla eſt. Ergo circulus diametri EC ſuperficiei hemiſphæricæ æqualis eſt. Quare cum ſuperficies conica EBC ſit ad *d* circulum diametri EC, baſim nempe ſuam, ut latus BE ad baſis radium EA, erit quoque ad ſuperficiem hemiſphæricam ſibi inſcriptam, ut BE ad EA, hoc eſt ut diameter in quadrato EBCF ad ſuum latus. Quod erat demonſtrandum.

a Patet ex 47. l. 1. *b* Per 2. l. 12. *c* Per 24. hujus. *d* Per 14. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XXXVII.

Sphara ad quadratum rhombum conicum ſibi circumſcriptum & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam in quadrato latus ad diametrum. Fig. ead. cum Fig. 13. l. 5.

Maximo ſphæræ circulo H G D I circumſcriptum eſto quadratum EBCF, a quo circa axem BF in orbem acto rhombus conicus gignatur ſphæram ambiens.

Ut EB quadrati latus (inſpice Fig. 6. lib. 4.) ad diametrum EC, ita fiat S ad R (inſpice Fig. 13. lib. 5.), quæ proportio per quatuor terminos S, R, Q, O continuetur. Erit igitur ratio S ad O triplicata *a* rationis S ad R, hoc eſt E B ad EC; & ratio O ad R erit duplicata rationis O ad Q, ſive R ad S, hoc eſt EC ad EB, ac proinde *b* O eſt ad R, ut quadratum EC ad quadratum EB, unde O eſt dupla ipſius R. His ita conſtitutis intelligatur rhombo conico ſphæra circumſcribi E B C F. Erit igitur ſphæra H G D I ad ſphæram E BCF in *c* ratione triplicata diametri GI (ſive EB) ad diametrum EC; hoc eſt (quod jam oſtendi) erit ut S ad O. Sphæra autem E B C F eſt ad rhombum conicum ſibi inſcriptum, *c* ut 2 ad 1, hoc eſt (quod oſtendi ſupra) ut O ad R. Igitur ex æquo ſphæra HGDI eſt ad eundem rhombum, qui ei eſt circumſcriptus, ut S eſt ad R, hoc eſt, ut in quadrato latus EB ad diametrum EC. Quod erat primum. Deinde ex ſecunda parte præcedentis patet hemiſphærii ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem coni EBC, ac proinde & totius ſphæræ ſuperficiem eſſe ad ſuperficiem

a Per def. 10. l. 5.

b Per 20. l. 6.

c Per 18. l. 12.

c Per 30. hujus.

ciem

ciem totius rhombi EBCF, ut latus in quadrato ad diametrum. Ergò ſphæra tam ſoliditate, quam ſuperficie eſt ad rhombum quadratum EBCF, ut in quadrato latus ad diametrum. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XXXVIII.

Fig. 27. *Superficies portionis (BGKD) conum æquilaterum (BKD) capientis, dupla eſt ſuperficiei ejuſdem coni.*

Patet ſimiliter ex 35. Nam ſuperficies portionis BGkD eſt ad inſcriptam conicam, ut *a* Bk ad BA, ſed quia conus BkD æquilaterus ponitur, kB eſt æqualis BD, adeoque dupla BA. Ergo etiam ſuperficies BGkD dupla eſt inſcriptæ conicæ BkD. Quod erat demonſtrandum.

a Per 35. hujus.

PROPOSITIO XXXIX.

Fig. 27. *Sphæra ſuperficies ad totam coni æquilateri ſibi inſcripti ſuperficiem eam proportionem habet, quam 16 ad 9.*

Eſto Z ſphæræ centrum, & conus æquilaterus ſphæræ inſcriptus BkD, axis ſphæræ, ac cono communis kZAO. Per hunc ſi ſecetur ſphæra, ac conus, producetur in ſphæra circulus maximus OBkD, in cono autem triangulum æquilaterum BkD, cujus unum latus BAD erit diameter baſeos conicæ QT. Et quia axis coni kA rectus eſt baſi QT, erit angulus BAk *d* rectus. Igitur quadratum BA æquale eſt *e* rectangulo kAO, Jam quia latus æquilateri trianguli abſcindit

d Per defi. 3. l. 11.
e Per corol. p. 17. l. 6.

dit *f* quartam axis partem AO, erit rectangulum kAO, hoc eſt quadratum BA triplum quadrati *i* AO. Quare cum quadratum radii ZO *l* quadruplum ſit quadrati AO, erit quadratum radii ZO ad quadratum radii BA, ut 4 ad 3. Ergo etiam *m* circulus OBkD eſt ad circulum QT ut 4 ad 3. Ergo ſunt quatuor circuli OBkD, hoc eſt *n* enim tota ſphæræ DG ſuperficies ad circulum QT, ut 16 ad 3. Atqui *o* ſuperficies coni æquilateri BkD eſt ad circulum QT, baſim nempe ſuam, ut 2 ad 1, ac proinde coni BkD tota ſuperficies, una cum baſi ſcilicet, eſt ad baſim, nempe circulum QT, ut 3 ad 1, ſive ut 9 ad 2. Ergo cum oſtenderim ſphæræ ſuperficiem eſſe ad eundem circulum ut 16 ad 3, erit ſphæræ DG ſuperficies ad totam æquilateri coni ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

f Per corol. 2. pr. 15. l. 4.
i Per 1. l. 6.
l Per 4. l. 2. vel 20. l. 6.
m Per 2. l. 12.
n Per 24. hujus.
o Per corol. 1. pr. 14. hujus.

Aliter.

QUoniam æquilateri trianguli latus BD abſcindit *p* quartam axis partem AO, erit quoque ſphærica ſuperficies BOD *q* quarta pars, ac proinde ſuperficies BGkD tres quartæ ſuperficiei totius ſphæræ. Quare ſi ſuperficies tota ſtatuatur eſſe 16, BGkD ſuperficies erit 12. Atqui ſuperficies BGkD *r* eſt dupla ſuperficiei conicæ BkD; ac proinde ad eam eſt, ut 12 ad 6. Ergo totæ ſphæræ ſuperficies eſt ad conicam BkD, ut 16 ad 6. Deinde, quia ſuperficies coni BkD, (utpote æquilateri) dupla *ſ* eſt baſeos QT, liquet, ſuperficiem conicam BkD (nimirum abſque baſi) eſſe ad totam coni ſuperficiem, ut 2 ad 3, hoc eſt, ut 6 ad 9. Igitur ex æquo tota ſphæræ ſuperficies eſt ad totam æquilateri coni

p Per corol. 5. pr. 15. l. 4.
q Per 27. hujus.
r Per præc.
ſ Per corol. 1. pr. 14. hujus.

ni

ni inſcripti ſuperficiem, ut 16 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

PROPOSITIO XL.

Fig. 28. *SPhæræ ſuperficies ad æquilateri coni ſibi circumſcripti totam ſuperficiem eam proportionem habet, quam 4 ad 9.*

Circulo ſphæræ maximo BPM circumſcriptum ſit triangulum æquilaterum DOF, a quo circa axem OAB in orbem ducto productus ſit conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus. Æquilatero autem triangulo DOF circumſcriptus etiam ſit circulus NDLOF, quem patet eſſe concentricum priori, & axis OAB producatur in N. Quoniam BN eſt *a* quarta pars axis ON, patet ON eſſe duplam kB. Quare cum circulorum ratio ſit *b* duplicata rationis diametrorum, erit circulus BPM ad circulum NDLOF, ut 1 ad 4. Atqui oſtenſum jam eſt in demonſtratione 1 præcedenti, circulum NDLOF eſſe ad circulum QT baſim coni æquilateri ſphæræ FL inſcripti, ut 4 ad 3. Ex *c* æquo igitur circulus BPM eſt ad circulum QT, ut 1 ad 3. Atqui tota coni DOF ſuperficies circuli QT *d* tripla eſt. Ergò tota coni ſuperficies circuli BPM noncupla eſt. Quare cum ſphæræ TP ſuperficies ejuſdem circuli BPM *e* quadrupla ſit, erit tota coni æquilateri DOF ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ, cui circumſcripta eſt, ut 9 ad 4. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 5. p. 35. l. 4.
b Per 2. l. 12.
c Per 22. l. 5.
d Per corollar. 1. p. huj.
e Per 24. hujus.

PRO-

PROPOSITIO XLI.

*Æ*Quilateri coni ſphæra circumſcripti tota ſuperficies quadrupla eſt ſuperficiei totius coni inſcripti eidem ſphæra. Fig. 28.

Æquilateri coni DOF circumſcripti tota ſuperficies eſt ad ſphæræ ſuperficiem, ut *a* 9 ad 4, & ſphæræ ſuperficies eſt ad coni inſcripti æquilateri SkT ſuperficiem, ut *b* 16 ad 9. Ergo ex *c* æqualitate perturbata circumſcripti æquilateri coni tota ſuperficies eſt ad totam ſuperficiem æquilateri inſcripti, ut 16 ad 4, ſive ut 4 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

a Per præc. *b* Per 39. hujus. *c* Per 23. l. 5.

PROPOSITIO XLII.

*S*Phæra ad inſcriptum ſibi conum æquilaterum (*B KC*) eam rationem habet, quam 32 ad 9. Fig. 29.

Sphæra, & conus BkC ſecentur plano per axem communem kO faciente in ſphæra circulum maximum OFkI, in cono autem triangulum æquilaterum BkC. Ducto deinde plano per centrum A ad Ok recto, abſcindatur hemiſphærium FGkI, cui inſcriptus intelligatur conus maximus FkI. Quoniam trianguli æquilateri latus BC abſcindit OP *d* quartam partem axis Ok, erit Pk ad Ak, ut 3 ad 2, hoc eſt, ut 9 ad 6. Baſis vero QT eſt ad circulum OFkI, hoc eſt ad baſim ND, ut 3 ad 4, hoc eſt ut 6 ad 8, uti patet ex demonſtratis pr. 39. Quare cum ratio coni BkC ad conum FkI componatur *e* ex ratione altitudinis Pk ad altitudinem Ak (hoc eſt ex ratione

d Per corol. 5. p. 15. l. 4.

e Per ſchol. p. 15. l. 12.

tione 9 ad 6,) & ex ratione baſis QT ad baſim ND (hoc eſt ex ratione 6 ad 8,) erit conus BKC ad conum FKI, ut 9 ad 8. Quare cum ſphæra CG quadrupla *f* ſit coni FKI, erit conus æquilaterus BKC ad ſphæram CG, ut 9 ad 32. Quod erat demonſtrandum.

f Per 30. hujus.

PROPOSITIO XLIII.

Fig. 28.

Conus æquilaterus ſphæræ circumſcriptus coni æquilateri eidem ſphæræ inſcripti octuplus eſt.

Coni æquilateri ſphæræ inſcripti, & circumſcripti ſunt SKT, & DOF, & axis communis eſto OKB. Secentur deinde plano per axem tam conus uterque, quam ſphæra; eruntque ſectiones triangula duo æquilatera, & circulus BPM maximus. Circa triangulum quoque DOF intelligatur deſcriptus eſſe circulus NDOF, & axis OKB producatur in N. Quoniam vero æquilateri trianguli latus DF abſcindit axis ON quartam *a* partem NB, patet NO eſſe duplam BK. Similiter, quia æquilateri alterius trianguli latus ST abſcindit axeos KB *b* quartam partem BC, erit NO ad BO, ut BK ad CK: & permutando ut NO ad BK, ſic BO ad CK. Sed NO dupla eſt BK. Ergo etiam BO dupla eſt CK. Igitur ob ſimilitudinem triangulorum DOF, SKT, etiam *c* DF, & ST diametri videlicet baſium conicarum, ſunt inter ſe in proportione dupla. Quare cum coni DOF, SKT ſint ſimiles, ac proinde eorum proportio *d* triplicata ſit proportionis diametrorum DF, & ST, quæ eſt 2 ad 1; erit conus DOF ad conum SKT, ut 8 ad 1. Quod erat demonſtrandum.

a Per corol. 5. p. 15. l. 4.

b Per id. corol.

c Per 4. l. 6.

d Per 12. l. 12.

PRO-

PROPOSITIO XLIV.

Sphæra ad circumſcriptum ſibi conum æquilaterum (DOF) & ſoliditate, & ſuperficie eam proportionem habet, quam 4 ad 9. Fig. 28.

Sphæra TP eſt ad inſcriptum *d* ſibi conum æquilaterum SKT, ut 32 ad 9. Inſcriptus autem SKT conus æquilaterus eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut *f* 1 ad 8, hoc eſt ut 9 ad 72. Igitur ex æquo ſphæra TP eſt ad conum æquilaterum circumſcriptum DOF, ut 32 ad 72; hoc eſt ut 4 ad 9. Propoſitione autem 40 demonſtravimus etiam ſphæræ ſuperficiem eſſe ad totam æquilateri coni circumſcripti ſuperficiem, ut 4 ad 9. Ergo ſphæra & ſoliditate, & ſuperficie eſt ad æquilaterum conum ſibi circumſcriptum, ut 4 ad 9. Quod erat demonſtrandum.

d Per 42. hujus.

f Per præced.

Quod igitur in ſphæra, & cylindro ſphæram ambiente miratus eſt Archimedes, idipſum in ſphæra, & æquilatero cono ambiente ſphæram jam demonſtravimus, ut videlicet & ſoliditatum inter ſe eadem proportio rationalis, quæ ſuperficierum, exiſtat. Quemadmodum enim ille reperit, ſphæram ad cylindrum eſſe tam ſoliditate, quam ſuperficie, ut 2 ad 3; ita nos docuimus, ſphæram & ſoliditate, & ſuperficie eſſe ad conum æquilaterum ſe ambientem, ut 4 ad 9.

Hinc vero illam ipſam proportionem, nempe ſeſquialteram, quam exiſtere ſphæram inter, ac cylindrum Archimedes tradidit, ab æquilatero cono cir-

cumſcripto, & ſoliditate etiam, ac ſuperficie continuari nullo negotio jam demonſtrabimus, atque ita huic pariter opuſculo finem imponemus.

PROPOSITIO XLV.

Fig. 30. *Conus æquilaterus ſphæra circumſcriptus, & cylindrus rectus ſphæra ſimiliter circumſcriptus, & ipſa ſphæra eandem proportionem continuant, nimirum ſeſquialteram, tam quoad ſoliditatem, quam quoad ſuperficiem totam.*

Nam per 32. hujus cylindrus rectus GK ſphæram ambiens tam ſoliditate, quam tota ſuperficie eſt ad ſphæram, ut 3 ad 2, ſive ut 6 ad 4. Per præcedentem vero circumſcriptus ſphæræ conus æquilaterus BAD, tam ſoliditate, quam ſuperficie eſt ad ſphæram ut 9 ad 4. Ergo idem conus eſt ad cylindrum tam ſoliditate, quam ſuperficie, ut 9 ad 6. Quare hæc tria corpora conus, cylindrus, ſphæra ſunt inter ſe, ut hi numeri 9, 6, 4, ac proinde continuant proportionem ſeſquialteram. Quod erat demonſtrandum.

FINIS.

Ad majorem Dei gloriam.

P. AN-

P. ANDREÆ TACQUET E SOCIETATE JESU

TRIGONOMETRIÆ LIBER UNICUS.

CAPUT PRIMUM.

Sinuum Definitiones.

Quid Sinus, Tangentes, Secantes, & quomodo inveniantur.

Sinus, Tangentes, Secantes ſunt rectæ quædam lineæ, quarum in analyſi triangulorum in Geometria practica, in Aſtronomia, aliiſque eſt uſus maximus.

Sinuum Definitiones.

ESto quadrans circuli ACE, cujus circumferentia CE diviſa ſit in partes 90 æquales, quas Gradus vocant, & ſinguli gradus in partes æquales 60, quæ vocantur Minuta, ſicut totus arcus CE diviſus ſit in partes æquales, ſeu minuta 5400. Ex centro A ad ſingulos gradus, & minuta emittantur rectæ, quarum unam deſigno litteris AF. Conſtituentur hoc facto anguli 5400, quibus ſubtenduntur arcus totidem uno ſeſe invicem minuto excedentes. Ex his unum deſigno litteris CAF. Primus angulus erit minuti unius, Fig. 1.

Digitized by Google

ſecundus duorum minutorum, & ſic porro; ſexageſimus minutorum 60; hoc eſt gradus unius, & ſic deinceps: poſtremus E A C eſt graduum 90, adeoque rectus. Tandem per minuta ſingula ducantur rectæ ad ſemidiametrum A C perpendiculares, quæ proinde etiam ipſæ numero erunt 5400 computando radium A E, quarum unam deſigno litteris F X. Hæ appellantur ſinus arcuum, & angulorum uno minuto ſeſe mutuo ſuperantium.

1 Igitur arcus exempli gratia F C, & anguli FAC ab ipſo ſubtenſi ſinus eſt recta FX, quæ ab F termino arcus perpendicularis eſt radio AC.

2 Pars radii X C inter arcum, & ſinum intercepta eſt ſinus verſus ejuſdem arcus F C, & anguli FAC.

3 Sinus complementi, ſive ſinus ſecundus arcus FC, & anguli F A C eſt FI ſinus illius arcus, nempe FE, qui quadrantem complet, adeoque & ſinus illius anguli, nempe F A E, qui cum priore FAC complet rectum CAE.

4 Sinus totus, ſive radius eſt ſemidiam. A E.

5 Arcus Q F quadrante major eundem habet ſinum F X, quem arcus minor C F, qui cum eo ſemicirculum conſtituit: & angulus recto major F A Q eumdem habet ſinum FX, quem angulus acutus F A C, qui cum eo efficit duos rectos.

Fig. 2. 6 In omni triangulo rectangulo B A C, latus B C recto angulo oppoſitum, eſt ſinus totus, ſive radius: reliqua vero latera ſunt ſinus angulorum, quibus opponuntur; latus nimirum A B eſt ſinus anguli O, latus A C ſinus anguli R.

Nam

Nam ſi centro C intervallo CB deſcribatur quadrans FBL, quia latus angulo recto oppoſitum CB, eſt jam radius quadrantis, erit CB ſinus totus per definit. 4; latus vero AB per defin. 1. erit ſinus anguli O, ſeu FCB. Rurſum centro B intervallo BC deſcripto quadrante QCI patet per eandem defin. 1. AC eſſe ſinum anguli R, ſive QBC. Ex quo jam nunc apparet, quantus ſinuum futurus in Trigonometria ſit uſus.

Definitiones Tangentium, & Secantium.

ESto circulus BXZ, cujus quadrans BX intelligatur, ut ſupra, diviſus in gradus, & minuta. Hunc tangat recta infinita BR, & ex centro A ad contactum B ducatur radius AB, qui *a* cum tangente conſtituet angulum rectum. Cogitentur deinde per quadrantis gradus ſingulos, & minuta ex centro A emitti rectæ AF, AL &c. quo facto conſtituentur anguli FAB, LAB &c. ad 5400, ut ſupra, quibus ſubtenduntur totidem arcus BC, BO, &c. Fig. 3. *a* Per 18. l. 3.

7 Arcus igitur BC, & anguli BAF tangens eſt recta BF, ſecans vero AF, ſinus totus AB: ſimiliter arcus BO, & anguli BAL tangens eſt BL, ſecans AL, & ſic deinceps.

8 Arcus quadrante minor BO, & arcus quadrante major ZO cum priore BO faciens ſemicirculum eandem habent tangentem BL, & ſecantem AOL.

9 In omni triangulo rectangulo FBA reſpectu acuti anguli FAB tangens eſt FB ipſi oppoſitum, latus alterum AB ipſi adjacens eſt ſinus totus, ſeu radius; hypotenuſa vero AF, ſeu latus recto angulo oppoſitum eſt ſecans.

Digitized by Google

Patet ex definit. 6. & propoſ. 16. lib. 3. ſi centro A per B deſcribatur circulus.

Pari modo reſpectu alterius acuti anguli AFB tangens eſt AB, ſinus totus, ſeu radius eſt FB, ſecans FA. Patet ex defin. 8., & prop. 16. lib. 3. ſi centro F per B circulum deſcripſeris.

Hypotenuſa igitur utriuſque acuti ſecans eſt, ac proinde cum hi anguli inæquales ſunt, diverſis numeris in tabulis ſinuum hypotenuſa exprimitur.

Cæterum notandæ in primis ſunt, ac probe intelligendæ definitiones 6, & 9. ut Sinus, Tangentes, Secantes ad uſum deducantur.

Sinuum, Tangentium, Secantium inventio.

INvenire Sinus, Tangentes, Secantes, eſt earum proportionem ad radium circuli aut veram, aut a vera inſenſibiliter aberrantem numeris exprimere. Ad eum finem intelligitur circuli radius in plurimas æquales partes diviſus, ut in 100000, aut 1000, 0000. Tum Geometrico ratiocinio inquiritur, quot ex illis radii partibus ſinguli Sinus, Tangentes, Secantes contineant, quæ inventio, ut poſtea oſtendam, eo accuratior futura eſt, quo plures in partes radius circuli diviſus aſſumetur. Hoc ſinuum artificium primi excogitarunt Hipparchus, & Menelaus, horum inventa deinde contraxit, & expolivit Ptolomæus, & noviſſime Joannes Regiomontanus perfecit, qui ad radium 10000000. Sinus omnium graduum, ac minutorum quadrantis ſupputavit. Denique horum omnium conatus egregios Clavius noſter, Pitiſcus, Rheticus, aliique complures illuſtrarunt, Quamvis autem ab iis omni-

mnibus præclare hoc in genere laboratum ſit, quia tamen prolixa hujus doctrinæ tractatio eſt, optandum ſane videtur, ut facilior ea ſtudioſis, atque expeditior, ſi fieri poteſt, efficiatur. Quare animus mihi eſt, artificium quam utile, tam pulchrum, & clarius, quam cæteri fecerunt, & brevius exponere. Rem omnem tribus Poriſmatis, & ſex Problematibus abſolvam. Sit ergo

Poriſma I.

DAto ſinu (FC,) cujuſvis arcus (FB,) complementi ſinum (FO) invenire. Fig. 4.

Ducto radio AF, quadratum AF *a* æquatur quadratis FC, AC. Quare ſi ex quadrato radii, ſeu ſinus totius auferas quadratum ſinus dati FC, remanet quadratum AC, hoc eſt quadratum FO. Igitur radix quadrata inde extracta dabit rectam FO ſinum complementi quæſitum.

a Per 47. l. 1.

Poriſma II.

DAto ſinu (CF,) cujus arcus (IC,) ſinum ſemiſſeos ejuſdem arcus invenire. Fig. 5.

Arcui IC ſubtende rectam IC, ad quam e centro perpendicularis ſit AL, quæ tam *b* rectam IC, quam arcum *c* ILC biſſecabit, ac proinde IO eſt ſinus arcus LI ſemiſſeos arcus ILC.

b Per 3. l. 3.

c Per 3. l. 3.

Ex ſinu dato CF per præcedentem inveniatur ſinus complementi CQ, ſeu FA, quo ablato ex ſinu toto AI, nota fit FI. Nota igitur eſt ſumma quadratorum IF, CF, hoc eſt *d* quadrati IC. Ex quo eliciatur radix quadrata; dabit

d Per 47. l. 1.

dabit ea rectam IC, ejuſque ſemiſſis ſinum quæſitum IO.

Poriſma III.

Fig. 6. **D***Atis ſinibus (LX, FR) duorum arcuum (LB, FB,) quorum differentia non ſit major 45 minutis, ſinuum (IS) arcus cujuſdam medii invenire.*

Ducatur perpendicularis FOQ. Erunt LQ, IO differentiæ ſinuum LX, IS ad ſinum FR. Et quia arcus LF eſt non major 45 minutis, adeoque parvus, non different arcus LF, IF ſenſibiliter a rectis lineis, ac proinde LFQ, IFO aſſumi poſſunt ut rectilinea triangula. Quia ergo IO eſt parallela LQ erit *a*

a Percc- roll. 1. p. 4. l. 6.

ut datorum arcuum maximi, & minimi differentia	ad arcus medii, & minimi differentiam
LF	IF
ita ſinuum datorum maximi, & minimi differentia	ad ſinus medii, & minimi differentiam
LQ	IO

Quare cum hujus analogiæ tres primi termini ſint noti, etiam quartus IO innoteſcet, quem ſi addamus ſinui dato minori FR, notus erit medius quæſitus IS.

Lemma.

Fig. 7. **S***Emiſſis ſubtenſa (CB) alicujus arcus (CFB) eſt ſinus ſemiſſeos ejuſdem arcus.*

Ex centro A ducatur radius AGF ad CB perpen-

pendicularis. Erit ergo CG per defin. 1. ſinus arcus CF. Atqui per 3. lib. 3. CG eſt ſemiſſis CB, & per 30. lib. 3. CF ſemiſſis CFB. Ergo &c.

Problema I.

Sinum arcus 45 *graduum invenire.*

QUadrantem CFB ſubtendat recta CB, ad Fig. 7.
quam ex centro A ſit perpendicularis AGF.
Quoniam igitur arcus CB 90 grad. *a* biſectus *a* Per 30.
eſt in F, erit FB arcus graduum 45, cujus ſi- l. 3.
nus eſt BG. Deinde ergo ob æqualitatem late-
rum AC, AB anguli *b* quoque ACB, ABC *b* Per 5.
æquales ſunt, qui vero ad A rectus erit. Ergo *c* l. 1.
ABC, ſeu ABG ſemirectus. Eſt autem *d* AGB *c* Per cor. 11. p.
rectus reliquus, ergo BAG *e* ſemirectus eſt, ideo- 32. l. 1.
que par ipſi ABG. Ergo latera BG, AG *n* æqua- *d* Per hyp.
lia ſunt. Ergo, quia quadratum AB æquatur *f* *e* Per 32. l. 1.
utrique quadrato BG, AG, unius quadrati *n* Per 6.
BG duplum erit. Semiſſis ergo quadrati ſinus to- l. 6.
tius AB æquatur quadrato ſinus 45 graduum *f* Per 47. l. 1.
BG.

Quare ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius eliciatur radix quadrata, dabit ea ſinum 45. grad. qui, quarum partium ſinus totus ponitur 10000000, reperietur earundem eſſe 7071068 fere.

Problema II.

Arcuum 60, *&* 30 *graduum ſinus invenire.*

ESto quadrans BC; arcus BF graduum 60, & ſi- Fig. 8.
nus ejus DF. Erit ergo arcus FC graduum
30, cu-

30, cujus ſinus ſit FG; ducatur autem BF, & ex centro AF. Quoniam arcus BQF eſt grad. 60. hoc eſt ſexta pars circumferentiæ circuli, e-
a Per corol.1.pr. 15.l.4. rit BF latus hexagoni, ideoque *a* æquale radio AF. Anguli *n* igitur ad A, & B in triangulo
n Per 6. l. 1. AFB æquales ſunt. Cum igitur in triangulis X, Z æquales ſint anguli FBD, FAD; item anguli FDB, FDA utpote recti; latus vero FD com-
b Per 27. l.1. mune, erunt *b* quoque latera BD, AD æqualia: ac proinde quadratum BD eſt quarta pars quadrati ſinus totius AB, ſeu FB; ſed quadratum
c Per 47. l.1. FB æquatur *c* quadratis BD, FD. Auferatur ergo quarta pars quadrati ſinus totius, ſive quadratum ſemiſſeos AD ſinus totius a quadrato ſinus totius FB, remanebit quadratum FD, cujus radix quadrata dabit rectam FD, ſinum 60. graduum. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 60. eſt 8660254.

Sinus porro FG grad. 30. *eſt ſemiſſis ſinus totius*, utpote æqualis ipſi DA. Idem patet ex lemmate. Poſito igitur ſinu toto 10000000 ſinus grad. 30. eſt 5000000.

Problema III.

Sinum 36 graduum invenire.

Fig.9. ESto ſemicirculus FBG, cujus baſi radius AB rectus inſiſtat. Tum radio AG biſecto in D ducatur recta DB, quæ transferatur ex D
a Ptolo. l.1.alma. in C. recta BC erit *a* latus pentagoni circulo inſcripti.

Ex ſumma quadratorum AB radii, ſive ſinus totius, & AD ſemiſſeos radii extrahe ra-
b Per 47. l.1. dicem quadratam, dabit ea *b* rectam DB,

hoc

hoc eſt DC. Ex DC aufer DA ſemiſſem radii, fiet nota AC, cujus quadratum adde quadrato radii AB, notum fiet *c* quadratum CB, ex quo radix elicienda dabit BC latus pentagoni ſubtendens gradus 72. Illius ergo ſemiſſis *d* dabit ſinum 36 graduum. Poſito ſinu toto 10000000, ſinus grad. 36. reperietur partium 5877852.

c Per 47. l.1.

d Per lem.

Corollarium.

EX ſinu grad. 36. reperietur *e* ſinus complementi, nempe grad. 54. partium 8090170.

e Per poriſ. 1.

Problema IV.

Sinum graduum 12 invenire.

IN quadrante CB ſit arcus BF graduum 30, KB grad. 54, & eorum ſinus DF, GK. Igitur erit eorum differentia KF grad. 24. complementa vero erunt FC, grad. 60, KC grad. 36, quorum ſinus ſint PF, NK.

Fig. 10.

Sinus NK grad. 36. inventus per Probl. 3. auferatur ex ſinu PF grad. 60. invento per Probl. 2. remanebit OF nota. Tum ſinus FD grad. 30. inventus per Problema 2. dematur ex ſinu KG grad. 54. invento per Coroll. præced. remanebit OK nota. Radix ſumma quadratorum OF, OK dabit *a* KF ſubtenſam 24 grad. illius vero ſemiſſis dabit *b* ſinum graduum 12.

a Per 47. l.11.

b Per lem.

Digitized by Google

Problema V.

Sinus omnium arcuum quadrantis ſeſe ordinatim uno minuto ſuperantium invenire.

EX quatuor ſinibus per præcedentia quatuor Problemata graduum videlicet 45, 60, 36, 12 reliquos ſinus omnes adminiculo trium Poriſmatum præmiſſorum inveniemus hunc in modum.

Ex ſinu graduum 45 inveniuntur ſinus ſeptem.

PRoblemate 1. inventus eſt ſinus arcus grad. 45, ſumatur graduum 45 ſemiſſis grad. 22, 30. & ſemiſſis horum grad. 11, 15. quæ amplius biſecari nequit, ſinus harum ſemiſſium reperiuntur per poriſma 2. nimirum ex ſinu grad. 45. reperitur ſinus grad. 22, 30. & ex hoc ſinus grad. 11, 15.

ex 45 gradibus
ſemiſſes 22, 30. 11, 15.

Accipiantur deinde harum ſemiſſium complementa; complementum arcus totius grad. 45, quia ipſi æquale, tanquam inutile omittitur.

ex ſemiſſibus 22, 30. 11, 15.
Complementa 67, 30. 78, 45.

horum complementorum ſinus reperiuntur per Poriſ. Rurſum ex his complementis ſumantur ſemiſses ſemiſſium, quoties poſſunt; tum complementa ſemiſſium, donec complementum occurrerit, quod biſecari nequeat.

Ex

Ex compl. 67, 30, 78, 45.
Semiſſ. 33, 45, nulla.
Compl. 56, 15.
Semiſſ. nulla.

Complementa poſtrema erant grad. 67, 30, & grad. 78, 45. Ex poſteriori, quia biſecari nequit, nihil ultra eruitur. Prioris, nempe grad. 67, 30 ſemiſſis eſt grad. 33, 45, cujus ſinus per poriſm. 2. obtinetur. Hujus complementum eſt grad. 56, 15, cujus ſinus reperitur per poriſ. 1. Quia vero complementum hoc ultimum non poteſt biſecari, hic terminus erit inveniendi ex ſinu graduum 45. Igitur ex ſinu graduum 45 inventi jam ſunt ſinus ſeptem, quorum inventionis ſeries in tabella appoſita exhibetur.

	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
	°	'	°	'	°	'	°	'
— —	90	0	45	0	—	—	—	—
Semiſſ.	—	—	—	—	22	30	11	15
Compl.	—	—	—	—	67	30	78	45
Semiſſ.	—	—	—	—	33	45	—	—
Compl.					56	15		

Ex Sinu graduum 60 *inveniuntur Sinus* 16.

Arcus 60 graduum biſecetur quoties poteſt, & accipiantur ſemiſſium complementa, quæ iterum biſeca, quoties potes, tum ſemiſſium rurſum accipe complementa, quæ denuo biſeca, & biſectionis complementum aſſume. Ex hac alterna acceptione, quæ ſexies repetita eſt, habentur arcus

Digitized by Google

arcus 16, quorum ſinus per poriſma 2, & 1 alternatim accepta invenientur.

Sinus grad. 60 ejuſque ſemiſſes		Complementa.		Semiſſes Cõplementorum.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
60	0										
30	0										
15	0	75	0	(37	30	52	30	26	15	63	45
				(18	45	71	15				
7	30	82	30	41	15	48	45				
3	45	86	15								

Alternam ſemiſſium, & complementorum ſeriem exhibet tabella hic appoſita; atque ita ſi hactenus inventi ſinus ordinentur adnumerato ſinu toto grad. 90, habebimus 24 ſinus arcuum ſeſe gradib. 3 $\frac{1}{45}$ ſuperantium.

Ex ſinu graduum 36 *habentur ſinus* 32.

SI enim arcus grad. 36. accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic deinceps. Deinde ipſius ſinus 36, & omnium ſemiſſium complementa, ac rurſus ſemiſſes complementorum, eaque alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio octies repetatur, provenient arcus 32, quorum ſinus per poriſma 2, & alternatim reperientur. Seriem inventionis horum 36 arcuum exhibet tabella ſubjecta.

Sinus

Digitized by Google

Sinus grad.36 cũ ſuis ſemiſſ.		Cõple-menta.		Semiſſ. Cõple-mento-rum.		Cõple-menta.		Semiſſ.		Compl.		Semiſſ.		Compl.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
36	o	54	o	(27	o	63	o	(31	30	58	30	29	15	60	45
				(				(15	45	74	15				
				(13	30	76	30	38	15	51	45				
				(6	45	83	15								
18	o	72	o												
9	o	81	o	(40	30	49	30	24	45	65	15				
				(20	15	69	45								
4	30	85	30	42	45	47	15								
2	15	87	45												

Ex ſinu 12. *graduum inveniuntur ſinus* 64.

HUnc in modum. Ex ſinu 12 accipiatur ſemiſſis, & ſemiſſis ſemiſſeos, & ſic porro, tum ipſius 12, & omnium ſemiſſium complementa ſumantur deni ſemiſſes complementorum, ac rurſus ſemiſſium complementa, &c. Hæc alterna ſemiſſium, ac complementorum acceptio, ſi duodecies repetatur, provenient arcus 64, quorum ſinus invenientur per poriſma 2, & 1. Seriem inventionis dictorum 64, arcuum exhibet tabella hic adjecta.

Sinus gr 12, ejuſq; ſemiſ.		Complementa		Semis Complement.		Complem.		Semiſ.		Complem.		Semiſ.		Complem.		Semiſ.		Complem.		Semiſ.		Complem.	
G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l	o	l
12	0	78	0	(39	0	51	0	(25	30	94	30	32	15	57	45								
				(				(12	45	77	15												
				(19	30	70	30	35	15	54	45												
				(9	45	80	15																
6	0	84	0	(42	0	48	0	24	0	66	0	(33	0	57	0	(28	30	61	30	30	45	59	15
				(								(				(14	15	75	45				
				(								(16	30	73	30	36	45	53	15				
				(21	0	69	0	(34	30	55	30	(8	15	81	45								
				(				(17	15	72	45	27	45	62	15								
				(10	30	79	30	39	45	50	15												
				(5	15	84	45																
3	0	87	0	43	30	46	30	23	15	66	45												
				21	45	68	15																
1	30	88	30	44	15	45	45																
0	45	89	15																				

Quod

Quod ſi ſinus omnes hactenus inventos ſinu toto adnumerato ſimul in ordine redigamus, ſinus habebimus 120 arcuum ſeſe mutuo 45 minutis ſuperantium; quorum primus eſt 45 minutorum, ultimus grad. 90.

G.	M	G.	M.	G.	M.	G.	M.
o	l	o	l	o	l	o	l
0	0	3	0	6	0	9	0
0	45	3	45	6	45	9	45
1	30	4	30	7	30	&c.	&c.
2	15	5	15	8	15	90	0

Ex his 120 *Sinibus*

Reliquos omnes intermedios ope tertii poriſmatis per regulam proportionum reperiemus hoc ordine.

Primo quæremus inter ſingulos horum 120 ſinuum duos medios duorum arcuum minutis 15 differentium, quibus ad priores 120 adjunctis, habentur ſinus arcuum 358, 15 minutis invicem excedentium.

Deinde inter ſingulos jam inventos duo quærentur medii duorum arcuum minutis 5 differentium, quibus additis ad priores 358, proveniunt ſinus arcuum 1076 ſe minutis 5 ſuperantium.

Denique inter illos ſingulos quæremus medios quatuor arcuum uno ſe minuto excedentium, quos ſi addamus illis 1076, habentur ſinus 5400, omnium videlicet arcuum quadrantis uno ſe minuto ſuperantium.

Pro-

Problema VI.

Secantes, & Tangentes quaſcunque invenire.

EX ſinibus jam inventis hæ lineæ nullo negotio innoteſcent.

Arcus cujuſcunque BS ex. gr. 70, 15. ſecans eſto XR, tangens BR, ſinus totus XB. Oporteat ſecantem XR invenire. Duc SK ſinum arcus SB, & SN ſinum complementi SA. Per prop. 4. lib. 6. ut XK (ſeu NS) eſt ad XS, ita XB, (ſeu XS) eſt ad XR. Sunt ergo tres proportionales) Fig. 3.

NS	XB	XR
Sinus compl. arcus dati grad. 70, 15.	Sinus totus. 10000000.	Secans quæſita

Quare ſi quadratum ſinus totius dividatur per NS ſinum complementi arcus dati, quotiens dabit ſecantem quæſitam XR, ut patet ex 18.l.9. Eucl.

Oporteat deinde dati cujuſcunque arcus BS tangentem reperire BR. Per prop. 4. lib. 6. ut Xk (ſeu NS) eſt ad kS, ita XB ad BR. Sunt ergo proportionales.

NS	KS	XB	BR
Sinus compl. arcus dati	Sinus arcus. dati	Sinus totus. 10000000	Tangens quæſita.

Quare cum tres primi termini ſint noti, per regulam trium innoteſcet quartus.

Habent igitur Studioſi, quod ſupra promiſeram, Sinuum, Tangentium, & Secantium theoriam tri-

bus poriſmatis, & problematis ſex comprehenſam. Scio, plures alias eſſe ſinuum reperiendorum vias: ſed ea, quam propoſui, cæteris explicatu, ac demonſtratu mihi eſt viſa facilior.

Problema VII.

Sinum unius, vel plurium Secundorum Minutorum invenire.

Fig 4. REpræſentet PB arcum unius minuti, ſeu 60 ſecundorum, KB vero arcum 26 ſecundorum ex. gr.; ſinus vero iſtorum arcuum ſint PM, kN. Quoniam hi arcus inſenſibiliter differunt a rectis lineis, aſſumi poſſunt triangula PBM, kBN tanquam rectilinea. Igitur per 4. lib. 6.

Ut PB 1 Min.	ad KB	ita PM	ad KN
ſeu 60 ſecun.	26 ſecun.	ſinus	ſinum
		1 Min.	26 ſecun.

Quare per regulam trium reperietur ſinus KN 26 ſecundorum, multiplicando videlicet ſecundum 26 per tertium, nempe 2909 ſinum 1 minuti, & productum dividendo per primum, nempe 60

Hoc opere reperietur ſinus unius minuti ſecundi 49 $\frac{29}{60}$ poſito ſinu toto 10000000, licebitque eadem methodo reperire ſinum unius tertii, & ſic in infinitum.

Pro-

Problema VIII.

Invenire ſinum arcus, qui præter gradus, & minuta prima, etiam ſecunda contineat.

INveniendus ſit ex. gr. ſinus graduum 36, 20′, 16″. Arcum grad. 36. 20′. proxime minorem dato repræſentet FB; arcum vero dato proxime majorem, nempe grad. 36, 21′ referat LB. Arcum datum grad. 36, 20′, 16″, qui inter hos medius eſt, referat IB. Sinus autem horum trium arcuum ſint LX, FR, IS, & ducatur perpendicularis FOQ. Arcus igitur LF eſt 1′, ſeu 60″; arcus IF, 16″; LQ differentia Sinuum LX grad. 36, 21′ & FR grad. 36, 20′. Quoniam igitur arcus LF, utpote 1′, inſenſibiliter differt a recta linea, & multo adhuc minus arcus IF, 16″, erit per propoſ. 4. l. 6. Fig. 6.

Ut LF	ad IF,	ita LQ differentia	ad IO diff.
60″	16″	Sinuum &c.	ſinus &c.

Quare cum tres primi termini ſint noti, etiam innoteſcet quartus, differentia IO, quæ addita FR ſinui grad. 36. 20′. dabit ſinum quæſitum grad. 36. 20′. 16.″.

Problema IX.

Dato Sinui arcum aſſignare.

SInum datum quære in tabulis: Si eum reperies, arcum illi debitum habes adſcriptum: ſi non reperies, quære eo proxime & majorem, & minorem, quos Fig. 6.

referant LX, FR, datum vero repræſentet IS. Ducta perpendiculari FOQ, erit per 4. lib. 6.

Ut LQ exceſſus
Sinus LX proxime majoris
dato ſupra minorem FR
ad
IO exceſſum
ſinus dati IS
ſupra minorem FR
ita
arcus LF
60 ſecund.
ad
numerum ſecundorum,
quæ debentur arcui IF.

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum innoteſcet, numerus nempe ſecundorum debitus arcui IF, qui additus gradibus, ac minutis arcus noti FB dabit arcum debitum ſinui dato IS.

Atque hæc quidem hactenus de Sinuum, Tangentium, & Secantium inventione. Reliquum eſt, ut quædam ad plenam hujus rei theoriam facientia ſequenti Scholio declaremus.

Scholium

Quæſtio eſt, cur radius circuli in tot partes diviſus aſſumatur.

UT *hujus aſſumpti cauſa intelligatur, meminiſſe debemus, omnes Sinus, Secantes, & Tangentes inventas eſſe vel per radicis extractionem, vel per Regulam proportionum. Et quidem illi* 120 *ſinus ar-*

cuum

cuum ſe invicem 45 *minutis ſuperantium per extractionem radicis reperti ſunt, ut patet ex Problem.* 1,2,3,4,5. *Cæteri vero omnes inter hos medii ex illis* 120 *per proportionis regulam innotuere, ut ex Problematis* 5 *poſtrema parte conſtat. Tangentes autem, & Secantes ex ſinibus jam notis per regulam eandem reperta ſunt, quemadmodum Problem.* 6. *oſtenſum eſt. Jam vero numeri, e quibus radix fuit elicienda, ut plurimum ſunt non quadrati, ex quibus ſi radicem educas, ea ſemper a vera, quæ (ut lib.* 3. *Arith. cap.* 6. *demonſtravi) impoſſibilis eſt, differet exceſſu, defectuve aliquo, minore tamen, quam ſit unitas. Hæc porro differentia, quæ ob fractionum in ſupputando moleſtiam negligitur, eo minoris momenti erit, quo major fuerit numerus ille, e quo radix educta fuit. Erit autem ille numerus eo major, quo radius in partes plures diviſus aſſumetur. Exemplum ſtatuamus in ſinu* 45 *graduum, quem Probl.* 1. *docuimus obtineri, ſi ex ſemiſſe quadrati ſinus totius radicem extraxeris. Si numerus radii, ſeu ſinus totius aſſumatur magnus, qualis hic eſt* 10000000, *illius etiam quadratus, adeoque & quadr. ſemiſſis* 50000000000000 *multo erit major. Porro radix integra, quæ elici poteſt ex* 50000000000000, *eſt* 7071068, *quæ quia ex maximo numero elicita eſt, etiam ipſa magnus eſt numerus. Unde fit, ut ipſius a radice vera impoſſibili defectus, qui ſemper unitate minor eſt, ad ipſam proportionem habeat inſenſibilem, proindeque tuto, & abſque ſenſibili errore ullo negligatur. Hanc igitur ob cauſam tantus numerus partium ſinus totius aſſumi debet. Verum, ut hujus rei cauſa manifeſtior evadat, omnia errorum capita exactius erunt colligenda. Primum caput erroris eſt in ſinibus illis primis* 120, *quos repe-*

rire oportuit per eductionem radicis ex numeris non quadratis. In reliquis deinde, qui ex his per regulam prop. eliciuntur, idemque proinde vitium participant, alii duo inſunt errores proprii, videlicet quod in triangulis LFQ, IFO arcus LF 45, & arcus IF 15, aut 5 min. aſſumantur tanquam recta linea, atque inſuper, cum regula proportionum exercetur, quod fractio ex diviſione reſidua negligatur. Quo vitio poſtremo etiam Tangentes, & Secantes, quæ omnes ex ſinibus per prop. reg. obtinentur, laborent neceſſe eſt. Denique cum ſinus perpauci tantum immediate reperiantur, cæteri vero ſinus omnes deducantur ex invicem, ex ſinibus autem Tangentes, & Secantes; manifeſtum eſt, ſingulos præter errores ſibi proprios contrahere etiam vitia eorum, e quibus ipſi derivantur; unde fit, ut error, qui in ſinu immediate invento ſimplex erat, in ſecundo quaſi duplicetur, in tertio triplicetur, & ſic deinceps. Unde conſequens eſt, eos ſinus eſſe accuratiores, qui ex paucioribus derivantur; exactiſſimos vero eſſe eos, qui immediate, hoc eſt ex aliis nullis inventi ſunt. Ex his ergo capitibus Sinuum, Tangentium, Secantium defectus oriuntur, qui ne eſſent notabiles, ſed quodammodo evaneſcerent, radium maximo partium numero diviſum aſſumere oportuit; & quamvis defectus illi ſint non unus, ſed (ut jam oſtendi) plures; tamen quod ſinguli nullius fere momenti ſunt, etiam ſimul juncti errorem vix ſenſibilem inducunt, ſi aſſumatur ſinus totus partium admodum multarum: qua enim proportione augetur numerus radii, eadem creſcunt numeri ſinuum, ac proinde errores, qui in iis ſupputandis committi debent, magis evaneſcunt.

Fig. 6.

Deinde iſtud etiam tyrones intelligant, ſi Sinus, Tangentes, Secantes accipiantur ad ſinum totum

10000000.

10000000, *quales paſſim in tabulis reperiuntur, abjectis duabus primis notis haberi Sinus, Tangentes, Secantes ad radium* 100000, *totidem videlicet cyfris mulctatum. Ex. gr. poſito radio* 10000000 *Sinus* 8 *grad. eſt* 1391731; *ſi cupiam minorem ad radium* 100000, *omiſſis duabus primis notis, is erit* 13917; *talis enim Sinus, Tangentis, Secantis differentia a majori ſolum erit fractio, cujus numerator ſint notæ abjectæ, denominator vero ſinus totus duabus cyfris mulctatus. Itaque ſinus* 8. *grad.* 13917 *minoris a majori* 1391731, *differentia erit* $\frac{31}{100000}$ *diametri. Ratio pendet ex natura logiſticæ decimalis, quam expoſui Arithm. Practicæ lib.* 2. *cap.* 9. *& ſeq. præſertim ex Theor.* 1. *&* 2. *c.* 10. *Poſtremo hoc imprimis hic obſervabitur, cum Sinus, Tangentes, Secantes expetuntur reſpectu radii ex. gr.* 100000, *exactiores fore eas lineas, ſi ſupputentur reſpectu ſinus* 10000000 *datum excedentis duabus cyfris, & ab iis ita ſupputatis totidem primæ notæ, ut jam dictum eſt, abjiciantur. Ratio eſt, quia errores ſinuum multis notis conſtantium, non verſantur niſi in primis notis. Ita Regiomontanus, cum ſinus caperet ad partes radii* 600000, *aſſumpſit radium* 600000, 00000, *& a ſinibus ad eum radium ſupputatis primas quinque notas ſuſtulit. Similiter Rheticus, ut haberet ſinus ad radium* 10000000000 *aſſumpſit radium,* 100000, 00000, 00000, *& a ſinibus per hunc repertis præſcidit quinque notas primas. Quo artificio obtinetur, ut notæ reſiduæ omnes veræ exiſtant, ac proinde ſinus ita reperti a veris non deficiant per unam integram earum partium, quarum radius in tabulis, ſive canone aſſumitur. Et tales ſunt ii omnes, qui in tabulis paſſim deſcripti ſunt.*

CA-

CAPUT II.

Triangulorum rectilineorum Analyſis.

TRiangulum omne, quod per ſe manifeſtum eſt, tria latera habet, & angulos tres, quæ ſimul juncta ſenarium numerum efficiunt. Ex his tria ſemper nota ſint oportet, ut tria reliqua, quæ ſunt ignota, cognoſcantur. Scientia igitur ea, quæ ex tribus datis, ſive cognitis docet tria reliqua incognita invenire, *Analyſis Triangulorum*, ab aliis *Trigonometria* appellatur. Hoc invento vix aliud ſeu præſtantius, ſeu utilius. Quod ex nunc tyrones, ut vel eminus perſpiciant, non ea ſolum triangula contemplari debent, quæ in charta, vel tabula delineantur: ſed ab his cogitationes ſuas transferre ad ea oportet, quæ in campis, atque in aere, imo & in ipſo cœlo per radios viſuales, & ipſas rerum diſtantias, longitudineſque deſcribuntur. Opportunum erit ex iis, quæ poſtea erunt uberius explananda, exemp. unum, alterumve quaſi ad rei totius ſpecimen aliquod afferre. Inter Problemata Trigonometriæ hoc erit inter cætera unum; qui dato uno latere trianguli rectanguli, & angulo acuto uno, reliqua latera quanta ſint, inveniri poſſint.

Fig. 11. Ex hoc Problemate montis, aut turris altitudinem metiri poteris. Turris alicujus altitudinem referat recta QF; diſtantiam vero oculi ab eadem FQ recta AQ horizontalis, cum qua rectum angulum conſtituit altitudo FQ; radium viſualem extentum a turris apice F ad oculum in A repræſentet recta FA. Habemus triangulum rectangulum intelligibile in aere deſcriptum,

ptum, cujus unum latus eſt AQ diſtantia oculi a turre, alterum QF ipſa turris altitudo, tertium radius viſualis AF. In hoc triangulo angulus QAF (ut ſuo loco oſtendam) fit notus inſtrumento; latus AQ diſtantia jam ſupponatur nota. Ex his duobus cognitis angulo videlicet acuto QAF, & diſtantia AQ, per univerſale Problema jam dictum invenietur quanta ſit altitudo turris QF. Adjungamus & alterum. Inter cætera Problemata Trigonometrica etiam iſtud occurrit: datis in triangulo quolibet duobus angulis, quæ ſit laterum inter ſe proportio, invenire.

Ex hoc Problemate ad diſtantiam Lunæ a Terra dimetiendam via aperitur. Centrum Lunæ eſto C, centrum terræ A, oculus in ſuperficie terræ in B; ſemidiameter orbis Terræ AB. Cogitentur tam ex terræ centro A, quam ab oculo B extendi rectæ ad Lunæ centrum C. Quo facto conſtituitur triangulum a Terra ad Lunam pertingens, cujus unum latus eſt ſemidiameter Terræ AB, reliqua duo ſunt diſtantiæ tam centri Terræ, quam ipſius oculi a centro Lunæ. In hoc triangulo angulus ACB aſtronomico artificio innoteſcit, angulus vero ABC fit notus per inſtrumentum. Itaque ex his duobus angulis jam cognitis per univerſale Problema jam dictum innoteſcet, quæ ſit proportio lateris CB, vel AC ad latus AB; hoc eſt, quoties diſtantia Lunæ a terra ſemidiametrum terræ contineat: ac proinde cum alio jam artificio, quot milliaria radius terræ contineat, innotuerit, ipſa etiam diſtântia Lunæ a terra in milliaribus innoteſcet. Ad tantæ rei notitiam nos deduxit problema hujuſmodi, quod tyro forte aliquis nullius eſſe uſus judicaſſet. Hæc ergo dicta ſint in gratiam eorum, Fig. 12.

qui-

quibus illud in ore ſemper, cui uſui; ut ex his etiam cætera, quorum uſum non perſpiciunt, æſtimare diſcant.

Annotationes quædam pro Tyronibus.

PRriuſquam ultra tendamus, expediet hic in memoriam revocare nonnulla, quæ in Elementis traduntur, in quibus ſub hæc initia hærere plerumque Tyrones ſolent. Prætereant iſta, qui his non indigent.

1 Datum, & notum idem ſignificant in hac materia.

2 Circumferentiam circuli partiri ſolent Mathematici in partes æquales 360, quas gradus appellant, & harum ſingulas rurſus in 60 æquales, quas minuta vocant.

3 Arcus circuli, ſeu pars circumferentiæ nota dicitur, cum ſcitur, quot gradus contineat; tunc enim arcus ille, quanta ſit totius circumferentiæ pars, innoteſcet.

Fig. 13. 4 Angulorum menſuræ ſunt arcus circuli, qui ex vertice anguli tanquam centro inter ejus crura deſcribuntur. Sic anguli C menſura eſt arcus OL centro C deſcriptus inter anguli crura CA, CB. Patet ex ultima lib. 6. Hac de cauſa angulus C dicitur eſſe tot graduum, quot graduum eſt ille arcus OL; ut ſi arcus OL eſt grad. 32, etiam angulus C erit graduum 32.

5 Angulus ille C dari, ſeu notus eſſe dicitur, quando ſcitur, quot graduum ſit, hoc eſt, quot graduum ſit arcus OL inter ejus crura ex vertice, ut centro deſcriptus.

6 Angulus rectus dicitur 90 graduum, quia arcus inter ejus latera centro vertice deſcriptus eſt 90 grad.

grad. ſeu quarta pars circumferentiæ totius.

Et duo recti dicuntur grad. 180; quia arcus inter eorum crura deſcriptus, eoſque ſubtendens, eſt grad. 180, ſemiſſis nempe circumferentiæ.

Et quatuor recti dicuntur efficere 360 grad. quia ſubtenduntur a tota circumferentia.

7 Si ex anguli vertice ut centro inter ejus latera plures deſcribantur arcus OQ, SV; minor æque eſt menſura anguli, ac major; quia minor æque magna pars eſt ſuæ circumferentiæ totius, ac major ſuæ; ac proinde ſi arcus major OQ eſt ex. gr. 32 graduum, quorum tota circumferentia major OQLH eſt 360, etiam minor arcus SV eſt graduum 32, quorum minor circumferentia SVRT eſt 360. Patet ex Corol. 3. pr. 33. lib. 6. Fig. 14.

8 Cujuſcunque trianguli tres anguli ſimul ſumpti efficiunt grad. 180. Quia per 32. lib. 1. tres illi anguli ſimul ſumpti ſemper efficiunt duos rectos, ac proinde, ſi ex angulorum verticibus A, B, C tanquam centris inter trianguli cujuſvis crura deſcribantur, eodem intervallo circini, tres arcus FG, XZ, OL ſimul ſumpti ſemper conflabunt ſemicirculum, hoc eſt arcum 180 graduum. Nam ſi centro C perficiatur ſemicirculus OLP, & arcus FG tranſcribatur ex L in Q; tertius arcus XZ æqualis erit reſiduo QP; adeoque tres ſimul arcus OL, FG, XZ conficiunt integrum ſemicirculum OLQP. Fig. 13.

9 Cum in triangulo ABC quocunque, noti ſint duo anguli A grad. 125, B grad. 34, etiam C tertius innoteſcit, ſi utriuſque dati gradus 159 ſubtrahantur a 180 gradibus. Remanent enim gradus 21 tertii anguli C. Patet ex annotatione 8, & ex 32 lib. 1. Atque hac de cauſa

ſa datis duobus angulis, etiam tertius dicitur eſſe datus.

Fig. 25. 10 Pari ratione, ſi in quovis triangulo (ABC) notus ſit unus angulus (B grad. 39.) innoteſcit etiam ſumma reliquorum (C, A) ſi gradus anguli noti (B grad. 39.) ſubtrahantur a 180 gradibus; remanent enim gradus (141) ſummæ duorum reliquorum (C, A). Patet ex annot. 8, & 32. lib. 1. Et hac de cauſa dato uno angulo, dicitur & ſumma reliquorum dari.

Fig. 16. 11 In triangulo rectangulo (BAC) dato acuto uno (C grad. 31) etiam acutus alter (B) innoteſcet, ſi acuti dati (C) grad. 31. ſubtrahantur a grad. 90; remanent enim grad. (59) pro acuto altero B. Patet ex annotat. 8. & 32. l. 1. Et hac de cauſa in triangulo rectangulo, cum datur acutus unus, dari dicitur etiam alter.

12 Quatuor termini A, B, C, Z dicuntur proportionales, cum primus A eſt ad ſecundum B, ut tertius C ad quartum Z.

ut A ad B,
ita C ad Z.

13 Termini noti ſunt, qui numeris exprimuntur, hoc eſt, quando ſcitur, quot partes alicui certæ æquales contineant.

14 Cum e quatuor proportionalibus tres termini ſunt noti, quartus vero incognitus, is ſemper innoteſcet, ſi ſecundus multiplicetur per tertium, & productus numerus dividatur per primum; quotiens enim diviſionis erit quartus, qui latebat.

Atque hæc eſt regula, quæ vulgo proportionum, ſive trium, & ob ſummam utilitatem Aurea appellatur; demonſtrata eſt p. 19. l. 9. Eucl. de qua vide plura lib. 4. Arithm. c. 1.

Dato angulo, datur ex tabulis ſinus ejuſdem: & dato

dato ſinu, datur angulus; ut ſi detur angulus grad. 40, 16; gradus 40 quære in vertice tabulæ, minuta autem 16 in columna prima ad lævam.

His adſcriptum reperies non ſolum ſinum illis debitum 6463460, ſed etiam tangentem 8470620, & ſecantem 13105396. Contra ſi detur ſinus ex. gr. 6463460, cujus angulum ignores, quære in columna ſinuum numerum datum; vel ſi non reperiatur, ei proxime æqualem; in columna prima ad lævam reperies minuta, & in vertice gradus anguli quæſiti.

Denique hoc obſerva: in analyſi trianguli rectanguli quamvis ſolum duo data exprimantur; ut duo latera, vel unum latus cum uno acuto; tamen datum tertium ſemper eſt ipſe angulus rectus, qui quia per ſe notus eſt, & triangulo rectangulo nominato ſatis ſubintelligitur, ulterius exprimi non ſolet.

ANA-

Digitized by Google

ANALYSIS

TRIANGULI RECTANGULI.

Problema I.

Datis omnibus angulis laterum proportionem invenire.

Fig. 15. BAſi AC adſcribe totum ſinum, lateri AB ſinum oppoſiti anguli C, lateri CB ſinum anguli oppoſiti A. Eadem erit laterum proportio, quæ ſinuum.

Demonſtratio patet ex defin. 6. cap. 1. Itaque ſi cupiam ſcire, quanto latus unum ſit altero majus, ex. gr. AC quam BC: ſinum 10000000 divide per ſinum 5150381. Quotiens $1\frac{4849619}{10000000}$ hoc indicabit; ſicut enim quotiens eſt ad 1, ita AC eſt ad BC.

Vel alterutri lateri circa rectum, puta BC, cui adſcribe ſinum totum, lateri BA tangentem acuti C, baſi AC ſecantem ejuſdem anguli C. Ita patebit laterum proportio, ut patet ex defin. 9. c. 1.

Problema II.

Fig. 16. *DAtis baſi (BC pedum 100), & acuto uno (B grad. 59) reliqua latera (AC, AB) invenire.*

IN triangulo rectangulo hypotenuſa, ſive baſis dicitur, quæ recto angulo opponitur, latera vero, quæ rectum angulum continent.

Inven-

Inventio lateris AC.

Ut data baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus AC, prout eſt ſinus anguli B grad. 59. 8571673
ita eadem baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	ejuſdem lateris AC pedes quæſitos.....

In quo analogiſmo, quia tres primi termini ſunt noti, etiam quartus incognitus, numerus nempe pedum lateri AC debitorum innoteſcet per regulam proportionum multiplicando videlicet ſecundum 8571673 per tertium 100, & productum 857167300 dividendo per primum 10000000, quotiens enim 85 $\frac{7167300}{10000000}$ ex ea diviſione proveniens, eſt quartus, qui latebat, numerus pedum ſcilicet, quos continet latus quæſitum AC.

Non aſſimilis inventio lateris AB. Nam quia datur acutus B grad. 59. etiam per 32. lib. 1. ſeu annotat. 11. datur acutus alter C grad. 31; unde etiam ſinus utriuſque dantur. Jam

Ut baſis BC, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	latus ignotum AB, prout eſt ſinus ang. gr. 31. 5150381
ita baſis BC, prout eſt pedum 100.	ad	lateris ignoti AB pedes quæſitos.....

Cum ergo tria prima ſint nota, etiam quartum, numerus videlicet pedum lateri AB debitorum per regulam trium innoteſcet.

Demonſtratio.

HOc unum tum hic, tum fere etiam in ſequentibus erit demonſtrandum, quatuor ſupradictos terminos eſſe proportionales. Id vero ex definitione 6. cap. 2. manifeſtum eſt. Nam baſis BC, latus nempe recto angulo A oppoſitum eſt ſinus totus, ſeu radius, latus vero AC eſt ſinus anguli oppoſiti B ex. gr. 59. grad. qui ex tabulis datur 8571673. Igitur quarum partium ſinus totus, nempe baſis BC eſt 10000000. earum ſinus anguli B, nempe latus AC eſt 8571673; ac proinde ut baſis BC prout eſt ſinus totus 10000000 eſt ad AC 8571673 ſinum anguli B, ita eadem baſis BC ex hyp. 100 pedes ad idem latus AC quæſitum, ſive ad numerum pedum in latere AC contentorum. Quod erat demonſtrandum.

Pari modo per defin. 6 BC eſt ſinus totus 10000000, & AB ſinus anguli C 31 grad. qui ex tabulis datur 5150381. Ergo ut BC ſinus totus 10000000 ad BA ſinum 5150381, ita eadem BC ex hyp. pedes 100. ad eandem BA incognito pedum numero conſtantem. Quod erat demonſtrandum.

NOTA.

Fundamentum hujus, & omnium ſequentium operationum, ac demonſtrationum eſt, quod quando duæ quantitates A, & Z notæ ſunt ſecundum quamvis earum menſuram, & una earum A etiam nota eſt in alia menſura, ex. gr. in pedibus, tum etiam altera Z in pedibus neceſſario innoteſcet per regulam auream, vide cap. 1. lib. 4. Arithm. noſtræ, ubi id demonſtratum eſt.

Pro-

Problema III.

Datis latere uno (AC milliariorum 1000,) & acuto uno latus reliquum (BA,) & baſim (BC) invenire. Fig. 17.

Ex uno acuto dato notus fiat alter: ut ſi B detur grad. 54. his ſubductis a 90. erit C gr. 36.

Inventio lateris AB.

Ut latus datum AC, ad prout eſt ſinus totus 10000000	latus ignotum AB, prout eſt anguli C dato lateri adjacentis tangens 7265426
ita latus datum AC, ad prout eſt milliariorum 1000	lateris ignoti AB milliaria quæſita.

Inventio baſis BC.

Ut latus datum AC, ad prout eſt ſinus totus 10000000	baſim ignotam BC, prout eſt acuti C dato lateri adjacentis ſecans 12360680
ita latus datum AC, ad prout eſt milliariorum 1000	ignotæ BC baſeos milliaria quæſita.

Quare cum in utroque analogiſmo tria prima ſint cognita, etiam quartum utrobique per regulam proportionum innoteſcet: eritque latus AB milliariorum 726 $\frac{5426}{10000}$ baſis vero BC milliariorum 123 $\frac{6068}{10000}$.

Demonſtratio .

PEr defin. 9. cap. 2. latus AB eſt tangens anguli C grad. 36, quæ ex tabulis datur 7265426, latus vero AC eſt ſinus totus 10000000, hoc eſt, quarum partium latus AC eſt 10000000, earum eſt AB latus 7265426. Ergo ut AC 10000000 eſt ad AB 7265426, ita eadem AC ex hyp. 1000 milliar. ad milliaria quæſiti lateris AB, hoc eſt ad numerum milliariorum in AB contentorum, ergo &c.

Pari modo per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C grad. 36 AC eſt ſinus totus 10000000 & BC ſecans; quæ ex tabulis datur 12360680. Ergo ut AC ſinus totus 10000000 eſt ad BC ſecantem 12360680, ita eadem AC ex hyp. 100 milliarium ad eandem BC ignotum numerum milliariorum continentem, ergo &c.

Problema IV.

Fig. 11. *BAſi (CB 1000 perticarum) & uno latere (AC 891 perticarum) datis, invenire acutos angulos, & latus alterum (AB.)*

Ut baſis data CB perticarum 1000	ad	latus datum AC perticarum 891
ita baſis eadem CB, prout eſt ſinus totus 10000000	ad	anguli ignoti B, qui dato lateri AC opponitur, ſinum.

Qui proinde per regulam proportionum reperitur 8610000; huic in tabula invenitur proxime æqualis 8910065, cui adſcriptus eſt angulus gr. 63, qui per probl. 9. cap. 2. adhuc reperitur exactius 15. ergo eſt angulus B, qui latebat, invento

to autem acuto B datur etiam acutus alter C grad. 27.

Quoniam vero jam in triangulo rectangulo nota eſt baſis CB cum angulo C, latus quæſitum BA invenietur per probl. 2.

Idem latus independenter ab angulis reperitur per probl. 3. in Scholio prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 6. cap. 2. CB eſt ſinus totus 10000000, & CA eſt ſinus anguli B; ergo ut baſis BC 1000 pertic. ad latus AC 891 pertic. ita baſis eadem BC prout eſt ſinus totus 10000000 ad idem latus AC prout eſt ſinus ignoti anguli B.

Aliter.

Ut latus CA datum pertic. 891	ad	baſim CB pertic. 1000
ita ſinus totus 10000000	ad	ſecantem ignoti ang. C datis CB, CA comprehenſi.

Demonſtratio eadem, ſed eſt defin. 9. cap. 2.

Problema V.

Duobus lateribus datis (BA pedum 79, CA pedum 100) acutos angulos, & baſim invenire. Fig. 19.

Inveniendus ſit angulus acutus C.

Ut datum latus AC adjacens quæſito ang. C	ad	alterum latus datum AB.
ita ſinus totus 10000000	ad	anguli quæſiti C tangentem.

Quæ per regulam prop. reperitur 7900000; huic proxime æqualis invenitur in tabula 6156615, cui adſcriptum reperies angulum 38 graduum, qui probl. 9. cap. 2. adhuc reperietur exactius. Tantus ergo eſt acutus C, qui latebat, quo ex grad. 90 ſubtracto datur & alter B grad. 52, quia vero noti jam ſunt acuti anguli, & ex hyp. etiam latera per probl. 2. etiam baſis BC fiet nota.

Alia baſis inventio ab angulis independens traditur probl. 2. Scholii prop. 47. lib. 1. elem.

Demonſtratio.

Per defin. 9. cap. 2. reſpectu anguli C ſinus totus eſt CA, tangens BA. Ergo ut CA ex hyp. pedum 100 ad BA ex hyp. pedum 79 ita eadem CA, prout eſt ſinus totus 10000000 ad eandem BA, ut eſt tangens quæſiti anguli C.

ANALYSIS TRIANGULI OBLIQUANGULI.

Triangulum, in quo nullus angulus rectus eſt, obliquangulum voco.

Problema VI.

Fig. 20. & 21. *Datis omnibus lateribus lateris ſegmenta (BF, CF) facta a perpendiculari (AF) ex oppoſito angulo ducta, & ipſam perpendicularem invenire.*

Centro A intervallo lateris minoris AB deſcribatur circulus ſecans reliqua latera in O, & Q, & producatur CA in L: manifeſtum eſt LC eſſe ſummam laterum AC, AB; & OC differentiam eorundem; item patet ex prop 3. lib. 3. BQ biſectam eſſe in F. His ita conſtitutis rectangula BCQ,

BCQ, & LCO *a* æqualia ſunt. Ergo per 14. vel 16. lib. 6. *a* Cor. 1. p. 36. l. 3.

Ut BC latus, in quod perpendicularis cadit,	ad LC ſummam laterum reliquorum BA, AC
ita OC differentia reliquorum laterum.	ad rectam CQ.

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum, nempe CQ innoteſcet, hæc, ſi perpendicularis intra triangulum cadit, (ut in fig. 20) ablata a latere noto BC notam relinquet BQ, cujus ſemiſſis BF eſt ſegmentum quæſitum minus, quo ſubtracto a latere BC, etiam majus ſegmentum CF innoteſcet.

Quod ſi perpendicularis cadat extra (ut in Fig. 21) tunc ex quarta proportionali CQ ſubtrahe latus BC, ut innoteſcat reſiduum BQ, hujus enim ſemiſſis BF dabit ſegmentum minus, ad quod adjecto latere BC habetur ſegmentum majus CF.

Ipſa vero perpendicularis AF fiet nota, ſi ex quadrato lateris BA adjacentis minori ſegmento ſubtrahatur quadratum minoris ſegmenti BF, & ex reſiduo extrahatur radix, ea enim erit AF, patet ex p. 47. lib. 1.

Porro ipſa quarta proportionalis CQ indicat quando perpendicularis intra triangulum cadat, quando extra, cum enim minor eſt latere dato BC, in quod incidit perpendicularis, ea cadet intra triangulum, cum major extra.

Hoc problema, quod ſane proinde pulchrum, atque utile eſt, expeditur etiam per propoſ. 13. & 12. lib. 2. ut tradidi in ſcholio ibidem; ſed modus hic traditus aliquanto facilior eſt.

Problema VII.

Fig. 22. 23. D*Atis omnibus angulis, laterum proportionem invenire.*

In quovis triangulo eadem eſt inter latera proportio, quæ inter ſinus angulorum lateribus oppoſitorum.

Demonſtratio.

Eſto triangulum obliquangulum ABC latera habens inæqualia (alias enim res per ſe eſſet manifeſta) & ex majori CB abſcindatur CI æqualis minori AB, ducanturque IL, BF ad AC perpendiculares, quæ quia ſunt inter ſe parallelæ,
a Per corol. 1. p. 4. l. 6. erit *a* CI (hoc eſt AB) ad CB, ut IL ad BF.
Sed poſito ſinu toto CI eſt IL ſinus *b* anguli C,
b Per defin. c. 1 & poſito ſinu toto AB, (hoc eſt eodem, quo ante, cum AB, CI æquales ſint) BF eſt *c* ſinus
c Per eand. anguli BAC, ergo latus AB eſt ad latus CB, ut ſinus anguli C ad ſinum anguli BAC, eadem erit in reliquorum comparatione laterum demonſtratio.

Tantum nota. Cum perpendicularis BF extra triangulum cadit, eam nihilominus eſſe ſinum an-
d Per eand. guli BAC, quia *d* ſinus eſt anguli BAF, cum
e Per defin. 5. quo *e* eundem habet ſinum angulus BAC, ejus complementum ad duos rectos.

Problema VIII.

Fig. 24. D*Atis omnibus lateribus, angulos invenire.*

Concipiatur in aliquod latus ex oppoſito angulo demiſſa perpendicularis AF, & per probl. 6. nota fiant ſegmenta BF, CF.

Tum,

Tum, quia in triangulo rectangulo BFA dantur BA, BF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus B. Rurſum, quia in triangulo rectangulo CFA dantur CA, CF, per probl. 4. ſimiliter innoteſcet angulus C, & per prop. 32. lib. 1. ſeu annot. 9. etiam tertius BAC.

Problema IX.

D*Ato latere (AC,) & duobus angulis, reliqua latera (AB, CB) invenire.* Fig. 25.

Per Problema 7.

Ut anguli B, qui dato ad lateri AC opponitur, ſinus 6293204.	anguli C oppoſiti quæſito lateri AB ſinum 2756374.
ita latus datum AC ad 1000 paſſuum	lateris quæſiti AB paſſus .....

Rurſus per Problema 7.

Ut anguli B dato lateri ad AC oppoſiti ſinus 6293204	anguli A oppoſiti quæſito lateri CB ſinum 8195521
ita latus datum AC ad 1000 paſſuum	lateris quæſiti CB, paſſus.

In utroque analogiſmo tria prima nota ſunt, quartum igitur utrobique, nimirum latera AB, CB innoteſcent per regulam proportionum.

Problema X.

D*Atis duobus lateribus (CA ped. 216, BA ped. 112) & angulo (Agr. 113) iis comprehenſo, reliquos an-* Fig. 26.

angulos (C, B,) & latus reliquum (CB) invenire.

Quoniam CA, BA latera dantur, etiam datur eorum ſumma 328 ped. & eorundem differentia ped. 104. Rurſum, quia datur angulus A grad. 113, datur & reliquorum ignotorum C, B ſumma (67 grad.) adeoque & ſemiſſis ſummæ (grad. 33, 30.) cujus proinde tangens 6618856 datur ex tabulis: his poſitis

Ut lat. datorum CA, BA ſumma 328. ped.	ad	laterum CA, BA differentiam 104. ped.
ita tang. 6618856 ſemiſſeos ſummæ incognitorum ang.	ad	tangentem ..... ſemiſſeos differ. ignotorum ang. CB

Cum ergo tria prima ſint nota, per reg. prop. innoteſcet quartum, nempe tangens ſemiſſeos differentiæ angulorum ignotorum C, B... huic in columna tangentium proxime reperitur æqualis..., cui adſcripti ſunt grad..... pro angulo ſemiſſeos differentiæ angulorum C, B, quam ſi addas ad ſemiſſem ſummæ grad. 33, 30, angulorum C, B, habetur B major quæſitus. Si ſubtrahas, proveniet minor C: latus reliquum CB reperitur per præc. jam enim præter latus, dantur & anguli.

Demonſtratio

Fig. 27. 26. Analogiſmi ſupra poſiti eſt ejuſmodi: fiant anguli HPF, FPG æquales angulis ignotis B, C: centro P deſcripto circulo, qui latera angulorum ſecet in H, F, G, ducantur ad FP perpendiculares HR, GL, quæ per defin. 1, & 6, & 5 erunt ſinus angulorum HPF, FPG, poſito ſinu toto, ſeu radio PH, PG, ducatur deinde re-

ɛta

ſta HOG, & fiat HX par ipſi GO, jungaturque PX, erit XO differentia ipſarum HO, HX, hoc eſt ipſarum HO, OG, denique ex centro P ducatur ad HG perpendicularis PQ, *a* quæ biſecabit HG, quoniam igitur æquales ſunt HQ, GQ; & HX, GO, etiam XQ, OQ æquales erunt. Unde QO eſt ſemiſſis differentiæ XO rectarum HO, OG, ex quo facile etiam oſtenditur, angulum HPQ eſſe ſemiſſem ſummæ angulorum HPO, OPG, hoc eſt *b* angulorum B, C: & QPO eſſe ſemiſſem differentiæ angulorum HPO, OPG; hoc eſt B, C: his poſitis differentia laterum CA, AB eſto Z.

a Per 3. l. 3.

b Per conſtr.

Quia HR eſt ſinus anguli HPF, hoc eſt B, & GL ſinus anguli FPG, hoc eſt C, erit latus *c* CA ad latus BA, ut HR ſinus anguli B ad GL ſinum anguli C, hoc *d* eſt (quia æquiangula ſunt triangula HRO, GLO) ut HO ad OG. Ergo CA *e* eſt ad Z differentiam laterum CA, BA, ut HO ad ipſarum HO, OG differentiam XO; & invertendo laterum differentia Z eſt ad CA, ut differentia XO ad HO, atqui (ut jam oſtendi) CA eſt ad BA, ut HO ad OG, igitur *f* ex æquo Z differentia laterum eſt ad BA, ut XO differentia ad OG. Ergo invertendo BA eſt ad Z, ut OG ad XO; quoniam ergo (ut oſtenſum ſupra) CA eſt ad AB, ut HO ad OG, ac proinde *g* componendo ſumma CA, AB eſt ad AB, ut HG ad OG; AB vero (ut jam oſtendi, ſit ad Z, ut OG ad XO, ex æquo *h* erit ſumma laterum CA, AB ad Z laterum differentiam, ut HG ad XO. Sed ut HG ad XO, ſic ſemiſſis HG, nempe HQ, quæ *i* tangens eſt anguli HPQ, ad ſemiſſem XO, nempe QO tangentem *k* anguli QPO. Ergo ſumma laterum CA, AB, eſt ad Z differentiam laterum, ut HQ tangens anguli HPQ

c Per probl. 7.

d Per 4. l. 6.

e Per corol. 2. p. 18. l. 5.

f Per 22. l. 5.

g Per 18. l. 5.

h Per 22. l. 5.

i Per defin. 9.

k ibid.

(qui,

(qui, ut oſtendi ſupra, eſt ſemiſſis ſummæ angulorum BC) ad QO tangentem anguli QPO, qui *eſt* ſemiſſis differentiæ angulorum B, C. Quod erat demonſtr.

Alia Problematis ſolutio.

Fig. 28. 29. Ex alterutro angulo incognito, ex. gr. ex B in latus oppoſitum ducta concipiatur perpendicularis BF.

In triangulo rectangulo BFA, cum detur baſis BA, & acutus angulus BAF, per probl. 2. invenietur BF, & AF, qua ſubtracta ex data CA in Fig. 28. addita vero ad CA in Fig. 29. nota fiet etiam CF.

Rurſum ergo in trigono rectangulo CFB cum dentur duo latera BF, CF per probl. 5. innoteſcet BC latus quæſitum, & angulus C, quem una cum dato ſubtrahe a 180 grad. remanebit B alter quæſitorum.

Problema XI.

Fig. 30. 31. *Datis duobus lateribus AB, CB, & angulo uno C iis non comprehenſo, reliquos angulos, & latus reliquum AC invenire.*

Per Problema VII.

Ut AB latus datum dato angulo C oppoſitum	ad	alterum latus datum CB.
ita ſinus anguli dati C	ad	ſinum ignoti anguli A, qui alteri lateri dato CB opponitur.

Quare cum tria prima ſint nota, etiam quartum, nempe ſinus anguli ignoti A, innoteſcet, & per ſinum invenietur in tabulis angulus ipſe A, ſi acutus ſit; ſi vero obtuſus, tunc angulus per ſinum inventus

tus ſubtractus a 180 gradibus relinquet quæſitum A. Ratio patet ex defin. 5.

Neceſſe igitur hic eſt ad inventionem anguli, ut ejus ſpecies aliunde nota ſit.

Inventis angulis, latus ignotum AC innoteſcet per probl. 9.

Aliter.

Ex angulo B datis lateribus comprehenſa ducta intelligatur BF perpendicularis ad latus ignotum AC. Fig. 32. 33.

In triangulo rectangulo BFC, cum detur baſis BC, & unus acutus C, innoteſcent per Problema ſecundum CF, & BF. Rurſus in trigono rectangulo BFA cum dentur baſis AB, & latus BF, innoteſcent per Probl. 4. angulus BAF, & latus FA.

Quod ſi angulus ignotus BAC, qui datis lateribus AB, CA comprehenditur, ſit acutus, ac proinde perpendicularis BF, ut in Fig. 32. intra triangulum cadat, angulus BAF jam inventus eſt ipſe BAC quæſitus, & tunc FA jam nota addenda eſt ad CF ante repertam, ut innoteſcat totum latus quæſitum AC. Fig. 32.

Si vero BAC ſit obtuſus, adeoque perpendicularis BF, ut in Fig. 33. extra triangulum cadat, angulus inventus BAF ſubtrahendus eſt a 180 gradibus, ut innoteſcat quæſitus BAC: & tunc FA jam nota demenda ex nota FC, ut innoteſcat latus quæſitum AC. Fig. 33.

Rurſum igitur ad inventionem anguli BAC, & lateris AC neceſſe eſt, ut aliunde anguli BAC nota ſit ſpecies.

DE

DE DIMENSIONE
TRIANGULORUM SPHÆRICORUM

Ex Encyclopædia

P. GASPARIS SCOTTI
E Societate Jeſu.

DE ELEMENTIS SPHÆRICIS

§. I.

ELementa ſphærica appello, quæ neceſſaria ſunt tum ad trigonometriam ſphæricam, tum ad univerſam ſphæricam ſcientiam intelligendam, cujuſmodi ſunt ſuppoſitiones nonnullæ, & definitiones.

Quæ ſequuntur, voco ſuppoſitiones, non quod nulla demonſtratione egeant, ſed quod demonſtrata ſumantur a Theodoſio, & aliis.

SUPPOSITIONES.

I.

Theod.l.1.ſphær.def.1.2.3.4. SPhæra eſt figura ſolida comprehenſa unica ſuperficie convexa, ad quam ab uno eorum punctorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ ductæ ſunt inter ſe æquales. Centrum ſphæræ eſt prædictum punctum. Axis ſphæræ eſt recta quædam linea per centrum ſphæræ ducta, & utrinque terminata in ſphæræ ſuperficie, circa quam quieſcentem circumvolvitur ſphæra. Poli

ſphæ-

ſphæræ ſunt extrema puncta ipſius axis. *In appoſita figura (quam globoſam fingere oportet) centrum eſt E; axis AC, & BD; poli A, & C, B, & D. Melius intelligentur hæc, & ſequentia, ſi ante oculos habeatur globus materialis.* Fig. 36.

II.

Polus circuli in ſphæra deſcripti eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, a quo omnes lineæ ad circuli circumferentiam tendentes recta ſunt inter ſe æquales. *Circuli AFCG polus unus eſt B, alter D; circuli vero BFDG polus unus eſt A, alter C.* Id. def. 5. Fig. 36.

III.

Circuli ſphæræ aut ſint maximi, aut non maximi: maximi ſunt, qui dividunt ſphæram in duas æquales partes. Et hi habent idem centrum cum ſphæra. Ex quo ſequitur, circulos ſphæræ habentes idem cum ipſa centrum eſſe maximos. Non maximi ſunt, qui non dividunt ſphæram in duas partes æquales. Et hi non habent idem centrum cum ſphæra. Unde circuli non habentes idem cum ſphæra centrum, non ſunt maximi. *In figura circulus AFCG eſt maximus; HIKL vero non maximus. Prioris centrum eſt E, idem quod ſphæræ.* Theod. p. 6. l. 1. Fig. 36.

IV.

In ſphæra maximi circuli ſe mutuo ſecant bifariam: & e contrario in ſphæra circuli, qui ſe mutuo bifariam ſecant, ſunt maximi. *Duo circuli ABCD, & AFCG ſecant ſe bifariam in A, & C.* Theod. l. 1. p. 11. 12. Fig. 36.

V.

V.

Omnes maximi circuli ejuſdem ſphæræ ſunt inter ſe æquales, quia eorum diametri ſunt æquales, cum omnes per idem centrum tranſeant,
Fig. 36. *ut patet in diametris AC, BD.*

VI.

Theod. p.13.l.1. Si in ſphæra maximus circulus circulum quempiam ad rectos angulos ſecet, & bifariam eum ſecat, & per polos ipſius tranſit. Ad rectos angulos (ſcilicet ſphæricos) ſecare ſe dicuntur, quando unus tranſit per polos alterius, & conſequenter non inclinat magis ad unam ejus partem,
Fig.36. quam ad alteram. *Sic AFCG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in punctis A, & C. Sic etiam BFDG ſecat circulum ABCD ad angulos rectos in B, & D. Utrobique autem bifariam ſe mutuo ſecant.*

VII.

Id. p.15. l. 1. Si in ſphæra maximus circulus eorum, qui in ſphæra ſunt circulorum, aliquem per polos ſecet, bifariam, & ad angulos rectos eum ſecat. *Explicatio patet ex proxime dictis.*

VIII.

V.Theor. 1. addit. ad pr.15. l.1.apud Clav. Fig. 36. Si in ſphæra maximus circulus per polos alterius cujuſpiam maximi circuli tranſeat, tranſibit viciſſim hic per polos illius. *Sic circulus maximus ABCD tranſit per polos B, & D circuli maximi AFCD, & hic viciſſim per polos A, & C alterius.*

IX.

IX.

Si in ſphæra circulus circulum per polos ſecet, circulus maximus eſt, & bifariam eum ſecat, & ad angulos rectos. *Sic quia circulus ABCD ſecat tam HIKL, quam AFCG per polos ipſorum B, & D, ſignum eſt eſſe maximum circulum, & utrumque bifariam ſecat, & ad angulos rectos ad H, & K, item ad A, & C.* V.Theor. 2.ibid. Fig.36.

X.

Si in ſphæra circulus circulum bifariam, & ad angulos rectos ſecat, circulus maximus eſt, & per polos eum ſecat. *Explicatio patet ex proxime dictis.* Ib.theo. 3.

XI.

Omnis circulus maximus diſtat undique per quadrantem maximi circuli a ſuo polo; ideoque omnis quadrans a polo maximi circuli in ipſum ductus eſt ei ad angulos rectos. *Sic AECG diſtat a ſuis polis B, & D per quadrantes AB, CB, AD, CD, &c.* Per cor. p.16.l.1. Theod. Fig.36.

XII.

Si duo, aut plures maximi circuli maximum circulum ad rectos ſecent angulos, concurſus ipſorum erit ipſiuſmet circuli polus. *Patet ex globo materiali, ſi in illo deſcribantur plures circuli maximi ſecantes alium maximum perpendiculariter.*

DEFINITIONES.

I.

Clav. in I. de tri. angu. ſphæric. def. 1. Fig. 37. ANgulus ſphæricus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe mutuo ſecantes continent. *Tales ſunt anguli AEC, CEB, &c. Dixi*, arcus circulorum maximorum, *quia anguli ab aliis ſphæræ circulis effecti in ſuperficie ſphæræ a Trigonometris non conſiderantur. Dixi præterea*, ſeſe mutuo ſecantes, *quia omnes circuli maximi in ſphæra ſe mutuo ſecant, & nunquam ſe mutuo tangunt*, per Suppoſit. 4.

II.

Id. def. 2. Angulus ſphæricus rectus eſt, quem in ſphæræ ſuperficie duo arcus circulorum maximorum ſeſe ad angulos rectos ſecantium continent. *Tunc autem duo circuli ſecant ſe ad angulos rectos, quando unus ad alterum rectus eſt, hoc eſt, quando unus ſecans alterum non inclinat magis ad unam partem, quam ad alteram, ut ſupra dicebam Suppoſit.* 6.

III.

Id. def. 3. Angulus ſphæricus obtuſus eſt, qui recto major eſt; acutus vero, qui minor eſt recto. *Explicatione non eget.*

V. Clav. lib. de triang. ſphæric. p. 10. *Conſtituitur angulus ſphæricus ad punctum datum in dato arcu circuli maximi in ſuperficie ſphæræ, ſi per illud punctum, & per polum dati arcus deſcribatur circulus maximus; hujus enim circuli circumferentia cum arcu dato angulum rectum*

Digitized by Google

ctum conſtituet, cum circulus hic ad circulum illius arcus ſit rectus per Suppoſit. 7. & 9. *Sic ſi* Fig. 17.
arcus ADB ſit circuli maximi arcus, & polus ejus ſit E; ſi ex puncto A per E ducatur circulus maximus AEB &c. erit angulus A rectus. Si per datum punctum deſcribatur arcus circuli maximi non per polos dati arcus, conſtituet circumferentia hujus circuli cum dato arcu angulos inæquales, obtuſum unum, alterum acutum. Sic circuli maximi arcus FHG cum circuli maximi arcu ADB ad punctum F conſtituit angulum AFH obtuſum, & HFD acutum.

IV.

Æquales ſphærales anguli ſunt, qui ſub arcubus circulorum ad æquales angulos inclinatorum continentur.

V.

Triangulum ſphæricum eſt, quod tribus arcu- Id. def. 5.
bus circulorum maximorum in ſphæræ ſuperficie continetur. *Itaque latera trianguli ſphærici ſunt arcus maximorum circulorum ſingulatim ſemicirculo minores. Triangulum ſphæricum eſt vel æquilaterum, ſi nimirum omnes tres arcus fuerint æquales: vel iſoſceles, ſi duo tantum arcus fuerint æquales: vel ſcalenum, ſi omnes inæquales inter ſe fuerint. Item vel rectangulum eſt, ſi nimirum aliquem angulum habuerit rectum: vel obtuſangulum, ſi aliquem obtuſum habuerit: vel acutangulum, ſi omnes acuti fuerint. In rectangulo, & obtuſangulo triangulo ſphærico, ſi unus angulus eſt rectus, vel obtuſus, poſſunt alii duo etiam eſſe recti, vel obtuſi, vel alter ſaltem, quod in rectilineis non contingit.*

 VI.

VI.

Clav. def. 6. Fig. 17. Arcus anguli ſphærici eſt arcus circuli maximi, cujus polus eſt in ipſo angulo, inter duos arcus angulum ſphæricum comprehendentes interceptus. *Sic arcus anguli AEC eſt AC &c: non omnis ergo arcus angulo ſphærico oppoſitus eſt illius anguli arcus. Quia vero polus circuli maximi abeſt ab eo quadrante circuli maximi, fit ut uterque arcuum angulum comprehendentium inter angulum, & anguli arcum poſitorum ſit quadrans. Quare ſi angulus fuerit rectus, arcus anguli erit quadrans; ſi acutus, quadrante minor; ſi obtuſus, major quadrante.*

VII.

Clav. def. 7. Complementum arcus eſt exceſſus, quo quadrans eum ſuperat, ſi arcus minor eſt quadrante: vel ab eo ſuperatur, ſi eſt quadrante major.

VIII.

Clav. def. 8. Complementum anguli ſphærici eſt exceſſus, quo quadrans arcum ipſius anguli ſuperat, vel ab eo ſuperatur.

IX.

Clav. def. 9. Sinus, Tangens, & Secans anguli ſphærici eſt ſinus, tangens, & ſecans illius arcus, qui arcus anguli dicitur.

§. II.

§. II.

De proprietatibus angulorum, & triangulorum ſphæricorum.

I.

SI anguli ſphærici crura, ſive latera continuantur, concurrunt, & ſemicirculos efficiunt. *Sic anguli BAC crura AB, AC continuata concurrunt in D, & efficiunt ſemicirculos ABD, ACD. Ratio eſt, quia* per 1. Definit. *duo arcus BA, & CA ſunt arcus maximorum circulorum ſeſe mutuo ſecantes;* per 4. vero ſuppoſit. *in ſphæra maximi circuli ſe mutuo bifariam ſecant.* Fig. 34.

II.

Si anguli ſphærici crura continuata concurrunt, & ſemicirculos efficiunt, fiunt duo anguli oppoſiti inter ſe æquales. *Tales ſunt anguli BAC, BDC. Ratio eſt, quia habent eandem menſuram, nempe arcum GH* juxta Definit. 6. Clav. 1. de trian. ſphæric. pr.13. Fig. 34.

III.

Cum arcus circuli maximi in ſphæra ſuper arcum circuli maximi conſiſtens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit. *Sic arcus circuli maximi IG conſiſtens ſuper arcum AGD facit duos angulos AGI, DGI. Si igitur circulus arcus IG tranſit per polum circuli arcus AGD, ſecatur hic ab illo ad angulos rectos* per 11. Suppoſit.; Clav.ib. p.5. Fig. 34.

 ſi non

ſi non per polum tranſit, fit unus angulus obtuſus, alter acutus, æquivalentes tamen duobus rectis.

IV.

Clav. ib. p. 8. Iſoſcelium triangulorum ſphæricorum duo anguli ſupra baſim ſunt æquales; & productis æqualibus arcubus etiam anguli infra baſim fiunt æquales. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquilaterum eſſe etiam æquiangulum.

V.

Clav. p. 9. Si trianguli ſphærici duo anguli ſunt inter ſe æquales, etiam latera ſub æqualibus angulis ſubtenſa ſunt inter ſe æqualia. Hinc ſequitur, omne triangulum ſphæricum æquiangulum eſſe etiam æquilaterum.

VI.

Clav. in cor. p. 25. Æquilateri trianguli ſphærici ſingula latera poſſunt eſſe quadrantes maximorum circulorum, & ſingula quadrantibus vel majora, vel minora. Quando ſingula ſunt quadrantes, omnes anguli ſunt recti: quando majora quadrantibus, omnes ſunt obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando in triangulo ſphærico æquiangulo ſinguli anguli ſunt recti, ſingula latera ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrantes: quando acuti, minora.

VII.

VII.

Iſoſcelis trianguli ſphærici æqualia duo latera Clav. pr.
poſſunt eſſe quadrantes, & majora, aut minora 25.
quadrantibus. Quando ſunt quadrantes, anguli ſunt recti: quando majora, obtuſi: quando minora, acuti. E contrario, quando duo anguli æquales ſupra baſim ſunt recti, latera æqualia ſunt quadrantes: quando obtuſi, majora ſunt quadrante: quando acuti, minora.

VIII.

In omni triangulo ſphærico iſoſcele, cujus duo Clav. pr.
latera æqualia ſunt quadrantes, ſi angulus ſub i- 26.
pſis comprehenſus eſt rectus, baſis eſt quadrans: ſi acutus, quadrante minor: ſi obtuſus, major. Et viciſſim, ſi baſis eſt quadrans, angulus oppoſitus eſt rectus: ſi major quadrante, obtuſus: ſi minor, acutus. Semper autem polus baſis eſt in angulo ſub lateribus comprehenſo.

IX.

In omni triangulo ſphærico, cujus omnes ar- Clav. p.
cus ſunt quadrante majores, vel unus quadrans, 27.
& reliqui duo quadrante majores, omnes tres anguli ſunt obtuſi.

X.

In omni triangulo ſphærico rectangulo, cujus Clav. p.
omnes arcus ſunt quadrante minores, reliqui duo 28.

anguli ſunt acuti. Et ſi reliqui duo ſunt acuti; erunt ſinguli arcus quadrante minores.

XI.

Clav. p. 29. In omni triangulo ſphærico, cujus omnes anguli ſunt acuti, arcus ſinguli ſunt quadrante minores.

XII.

Clav. pr. 30. In omni triangulo ſphærico, cujus unus quidem arcus quadrante major ſit, reliquorum vero uterque quadrante minor, nullus angulorum rectus eſt.

XIII.

Clav. in cor. pr. 38. Fieri non poteſt, ut in triangulo ſphærico rectangulo unus tantum arcus ſit quadrans. *Quare qui concedit in triangulo unum quadrantem, concedere debet & alterum, & ſaltem duos angulos rectos.*

Digitized by Google

§. III.

De Dimenſione Triangulorum Sphæricorum rectangulorum, in quibus unus tantum eſt rectus.

SI triangulum ſphæricum habet tres rectos, datis, ſeu cognitis illis, data ſunt etiam latera ipſorum, utpote quadrantes, & viciſſim *per* 6. *Propriet.* Si habet duos rectos, datis illis, dantur & latera rectis oppoſita, nempe duo quadrantes *per* 6. *Propriet.* Si datur etiam latus tertium, datur angulus tertius, & viciſſim; quia tunc latus tertium eſt menſura anguli *per* 6. *Definit.* In his igitur caſibus nulla trigonometria eſt opus, ſed ſolum, quando triangulum habet unicum rectum, & reliquos obliquos, cujuſmodi eſt triangulum appoſitum rectangulum ad B. Sexdecim variationes in hoc caſu occurrere poſſunt, pro quibus ſexdecim regulas præſcribimus. In omnibus nomine baſis intelligimus arcum recto angulo oppoſitum, ut hic arcum AC. i g. 35.

Propoſitio I. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quæſito opponitur, invenire.

IN præcedenti triangulo ſit data baſis AC 60°, & latus AB 20°, ſitque inveniendus angulus C oppoſitus lateri dato. Fiat ut ſinus totus ad ſinum lateris AB dati, ita ſecans complementi baſis Fig. 35.

ſis AC ad ſinum anguli C quæſiti : *Exemplum*. Sinus totus eſt 10000000, ſinus lateris AB 20° eſt 3420202; ſecans complementi baſis AC 60°, eſt 11547005. Ducta ſecante prædicta per ſinum lateris AB, fit ſumma 39493089595010, qua diviſa per radium 10000000, provenit quotiens 3949308 $\frac{9595}{10000}$ pro ſinu anguli C, cui reſpondent 23°. 15′. 42″. *Iuxta hanc normam etiam reliqua operationes inſtitui debent. Brevitatis cauſa omitto exempla in ſequentibus.*

Propoſitio II. Problema.

Angulum ex baſe, & latere, quod angulo quaſito adjacet, invenire.

Fig. 35. IN præcedenti triangulo data baſis AC ſit 60°: 30′, latus BC 30°, ſitque inveniendus angulus C lateri dato adjacens. Fiat, ut radius ad tangentem lateris BC dati, ita tangens complementi baſis AC, ad ſinum complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio III. Problema.

Angulum ex baſe, & altero angulo non recto invenire.

Fig. 35. BAſis AC ſit 60°, 30′, angulus A datus ſit 13°, 30′, & quæratur angulus C. Fiat, ut radius ad ſinum complementi baſis AC, ita tangens anguli A dati ad tangentem complementi anguli C quæſiti.

Pro-

Propoſitio IV. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo oppoſito, & altero angulo non recto invenire.

Angulus inveſtigandus ſit C, latus datum AB, & angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſinum anguli A dati, ita ſinus complementi lateris AB dati ad ſinum complementi anguli C quæſiti. Fig. 35.

Propoſitio V. Problema.

Angulum ex latere quæſito angulo adjacente, & altero angulo non recto invenire.

Dummodo conſtet, num angulus quæſitus ſit major recto, aut minor; vel an baſis, aut latus alterum non datum ſit quadrante majus, aut minus. Angulus inveſtigandus ſit C, latus datum BC, angulus datus A. Fiat, ut radius ad ſecantem lateris dati, ita ſinus complementi anguli dati ad ſinum anguli quæſiti. Fig. 35.

Propoſitio VI. Problema.

Angulum ex utroque latere circa angulum rectum invenire.

Angulus inveſtigandus ſit C, latera data AB, & BC circa angulum rectum. Fiat, ut ſinus Fig. 35.

nus totus ad ſinum lateris BC, cui angulus quæſitus adjacet, ita tangens complementi alterius lateris AB quæſito angulo oppoſiti ad tangentem complementi anguli C quæſiti.

Propoſitio VII. Problema.

Latus ex baſe, & altero latere invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, latus datum BC, latus, quod inveſtigatur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem dati lateris BC, ita ſinus complementi baſis AC ad ſinum complementi lateris AB quæſiti.

Propoſitio VIII. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus C, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum baſis AC, ita ſinus anguli dati C ad ſinum lateris AB quæſiti.

Propoſitio IX. Problema.

Latus ex baſe, & angulo, qui lateri quæſito adjacet, invenire.

Fig. 35. BAſis data ſit AC, angulus datus A, latus, quod quæritur, AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum

ſinum complementi anguli A dati, ita tangens baſis AC ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio X. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui quæſito lateri adjacet, invenire.

DUmmodo conſtet, an quæſitum latus ſit quadrante majus, aut minus; vel an alter angulus non rectus ſit acutus, aut obtuſus; vel denique, an baſis ſit quadrante minor, vel major. Latus quæſitum ſit AB, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut radius ad tangentem complementi anguli A dati, ita tangens lateris BC dati ad ſinum lateris AB quæſiti. Fig. 35.

Propoſitio XI. Problema.

Latus ex altero latere, & angulo, qui lateri quæſito opponitur, invenire.

LAtus quæſitum AB, latus datum BC, angulus datus C. Fiat, ut radius ad ſinum lateris BC dati, ita tangens anguli C dati ad tangentem lateris AB quæſiti.

Propoſitio XII. Problema.

Latus ex utroque angulo non recto invenire.

LAtus quæſitum AB, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi Fig. 36.

ti anguli A, ita ſinus complementi anguli C ad ſinum complementi lateris AB quæſiti.

Propoſitio XIII. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei adjacente invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum AB. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi anguli A dati, ita tangens complementi lateris A B dati ad tangentem complementi baſis AC quæſitæ.

Propoſitio XIV. Problema.

Baſim ex latere, & angulo ei poſito invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, angulus datus A, latus datum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſecantem complementi anguli A dati, ita ſinus lateris BC dati ad ſinum baſis AC quæſitæ.

Propoſitio XV. Problema.

Baſim ex utroque latere invenire.

Fig. 35. BAſis quæſita AC, latus unum datum AB, alterum BC. Fiat, ut ſinus totus ad ſinum complementi lateris AB, ita ſinus complementi alterius lateris BC ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ.

Propoſitio XVI. Problema.

Baſim ex utroque angulo non recto invenire.

BAſis quæſita AC, anguli dati A, & C. Fiat, ut ſinus totus ad tangentem complementi anguli A, ita tangens complementi alterius anguli C ad ſinum complementi baſis AC quæſitæ. Fig. 15.

§. IV.

De Dimenſione Triangulorum Sphæricorum obliquangulorum.

AD quatuordecim caſus reduci poſſunt cum *P. Joanne Baptiſta Ricciolo* omnia, ad quæ obliquangulorum triangulorum ſphæricorum dimenſiones pertinent, quæ totidem Problematibus cum eodem ſolvo, ut ſequitur.

Propoſitio XVII. Problema.

Angulum ſpecie præcognitum ex datis duobus lateribus, & angulo uni eorum oppoſito invenire.

A*Ngulus ſpecie præcognitus dicitur, quando ſcitur utrum ſit acutus, vel obtuſus.* Fiat, ut ſinus lateris oppoſiti angulo dato ad ſinum anguli dati, ita latus reliquum datum ad ſinum anguli quæſiti, ſi acutus eſt. Si obtuſus eſt, ſubtrahe angulum prædicto modo inventum a gradibus 180, eritque reſiduum angulus quæſitus.

Pro-

Propoſitio XVIII. Problema.

Angulum verticalem ex datis duobus lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, & ſpecie anguli oppoſiti reliquo lateri, invenire.

A*Ngulum verticalem appello, qui a datis lateribus comprehenditur*. Fiat, ut radius ad tangentem anguli dati, ita ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi *anguli primo inventi*. Deinde fiat, ut tangens lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi anguli primo inventi ad ſinum complementi *anguli ſecundo inventi*. Jam, ſi anguli datis lateribus oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei, ſumma inventorum angulorum primi, & ſecundi erit angulus verticalis quæſitus; ſin minus, differentia inventorum angulorum erit quæſitus angulus verticalis.

Propoſitio XIX. Problema.

Angulum utrumque ad baſim ex datis lateribus duobus ſimul ſemicirculo minoribus, & angulo verticali invenire.

FIat, ut ſinus complementi ſemiſummæ laterum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens complementi ſemianguli verticalis ad tangentem ſemiſummæ angulorum quæſitorum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ laterum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita

tan-

tangens complementi ſemianguli verticali ad tangentem ſemidifferentiæ, addendæ ipſi ſemiſummæ angulorum, ut fiat angulus major, demendæ, ut fiat angulus minor quæſitorum.

Propoſitio XX. Problema.

Angulum quemvis ad baſim ex datis lateribus duobus, quorum alterum ſaltem ſit quadrante minus, & angulo verticali acuto invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli verticalis, ita tangens complementi lateris oppoſiti angulo quæſito ad tangentem complementi primi caſus. Deinde fiat, ut tangens complementi anguli verticalis, ad ſecantem complementi anguli primo inventi, ita ſinus differentiæ inter primum caſum, ac latus alterum ad tangentem complementi anguli quæſiti.

Propoſitio XXI. Problema.

Angulum tertium ex datis duobus angulis acutis, & latere oppoſito uni eorum, ac ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo dato invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum complementi lateris dati, ita tangens anguli adjacentis eidem lateri ad tangentem complementi primi anguli. Deinde fiat, ut ſinus complementi anguli adjacentis dato lateri ad ſinum complementi reliqui dati anguli, ita ſinus primi anguli ad ſinum ſecundi anguli ſpecie conformis lateri non dato. Jam, ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi anguli inventi conflabit

angulum tertium quæſitum; ſi vero eſt majus quadrante, ſumma facta ex ſecundo angulo, & primi anguli complemento ſubtracta ex gradibus 180 eundem dabit.

Propoſitio XXII. Problema.

Angulum baſi oppoſitum ex datis duobus angulis, quorum unus ſaltem ſit acutus, & ex baſi iis adjacente, quæ ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum anguli datorum minoris, ita ſinus reliqui anguli dati ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita ſinus verſus, baſis ad inventum ſecundum. Tertio addatur inventus ſecundus ſinui verſo differentiæ inter utrumvis datorum angulorum, & reliqui ſupplementum ad gradus 180, & fiet ſinus verſus anguli verticalis quæſiti.

Propoſitio XXIII. Problema.

Angulum quemlibet tanquam verticalem ex datis tribus lateribus quærere.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi lateris unius continentis angulum quæſitum, ita ſecans complementi lateris alterius eundem continentis ad inventum primum. Deinde fiat, ut radius ad inventum primum, ita differentia ſinuum verſorum anguli quæſiti,

Pro-

Propoſitio XXIV. Problema.

Baſim ex duobus datis lateribus ſingulatim quadrante minoribus, & angulo uni eorum oppoſito, ac ſpecie anguli oppoſiti reliquo dato lateri invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli dati, ita tangens complementi lateris adjacentis angulo dato ad tangentem complementi primi arcus. Deinde fiat, ut ſinus complementi lateris adjacentis angulo dato, ad ſinum complementi reliqui lateris dati, ita ſinus complementi arcus primi ad arcum ſecundum addendum arcui primo, ſi anguli lateribus datis oppoſiti ſunt ejuſdem ſpeciei, ut habeatur baſis; alioquin differentia inventorum arcuum dabit baſim.

Propoſitio XXV. Problema.

Baſim ex datis lateribus duobus, quorum ſaltem unum ſit quadrante minus, & ex dato angulo verticali acuto, invenire.

Fiat, ut radius ad ſinum lateris datorum minoris, ita ſinus reliqui lateris ad aliud; invenietur arcus, qui vocetur primus. Deinde fiat, ut radius ad arcum primum, ita ſinus verſus anguli verticalis ad arcum ſecundum, quem adde ſinui verſo differentiæ laterum, & fiet ſinus verſus baſis quæſitæ.

Propoſitio XXVI. Problema.

Baſim adjacentem duobus angulis datis acutis ex iis, & ex latere uni eorum oppoſito, nec non ſpecie lateris oppoſiti alteri angulo invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem anguli adjacentis lateri dato, ita tangens complementi lateris dati ad tangentem primi arcus. Deinde fiat, ut tangens anguli adjacentis lateri dato ad tangentem complementi reliqui anguli dati, ita ſinus primi arcus ad ſinum ſecundi arcus ſpecie conformis lateri non dato. Jam ſi latus datum eſt minus quadrante, ſumma primi, & ſecundi arcus inventi conflabit baſim quæſitam. At ſi majus eſt quadrante, ſumma facta ex ſecundo arcu, & ex complemento primi arcus ad ſemicirculum conflabit illam.

Propoſitio XXVII. Problema.

Latus dato angulo oppoſitum, ſpecie tamen præcognitum, ex datis duobus angulis, & latere uni eorum oppoſito invenire.

Fiat, ut ſinus anguli oppoſiti dato lateri ad ſinum dati lateris, ita ſinus reliqui anguli dati ad ſinum lateris quæſiti quadrante minoris. At, ſi debeat eſſe majus quadrante, ſubtrahatur latus inventum a gradibus 180, & habebis latus quæſitum.

Digitized by Google

Propoſitio XXVIII. Problema.

Latus utrumque unico actu ex datis angulis duobus ſimul duos rectos non excedentibus, & ex baſe ipſis adjacente invenire.

Fiat, ut ſinus complementi ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum complementi ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemiſummæ laterum. Deinde fiat, ut ſinus ſemiſummæ angulorum datorum ad ſinum ſemidifferentiæ eorundem, ita tangens ſemibaſis ad tangentem ſemidifferentiæ laterum addendæ ipſi ſemiſummæ laterum, ut habeatur latus majus: demendæ, ut habeatur minus.

Propoſitio XXIX. Problema.

Latus utrumvis ex datis angulis duobus, quorum ſaltem unus ſit acutus, & ex baſi adjacente, qua ſit minor quadrante, invenire.

Fiat, ut radius ad tangentem anguli oppoſiti lateri quæſito, ita ſinus complementi baſis ad tangentem complementi primi inventi. Deinde fiat, ut tangens complementi baſis ad ſecantem primi inventi, ita ſinus complementi differentiæ inter primum inventum, & ſecundum datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo acuto; vel ſinus complementi ſummæ factæ ex invento primo, & altero datorum angulorum, ſi quæritur latus oppoſitum angulo obtuſo ad tangentem complementi lateris quæſiti, ſi di-

ſta ſumma, aut differentia non excedat grad. 90; vel complementi ad gradus 180. ſi excedat.

Propoſitio XXX. Problema.

Latus quodvis tanquam baſim ex datis tribus angulis invenire.

Fiat, ut radius ad ſecantem complementi alterutrius angulorum quæſitæ baſi adjacentium, ita ſecans complementi reliqui dictorum angulorum ad arcum, qui vocetur inventum. Deinde fiat, ut radius ad arcum inventum, ita differentia duorum ſinuum verſorum (de qua mox) ad ſinum verſus baſis quæſitæ. Unus dictorum ſinuum verſorum ſit ſinus verſus anguli verticalis, alter autem ſinus verſus differentiæ, quæ eſt inter quemvis duorum angulorum adjacentium baſi, & inter alterius item baſi adjacentis ſupplementum ad gradus 180.

Digitized by Google

APPENDIX

Qua demonſtratur, ex falſo poſſe directe deduci verum.

IN theſibus Mathematicis, quas Lovanii ſeſqui abhinc anno Illuſtriſs. D. Theodorus D'Imerſelle Comes de Bouchove & S. Imperii magna ingenii commendatione, & auditorum plauſu publice propugnavit, inter cæteras propoſui aſſertionem hujuſmodi: *ex falſis poſſe verum directe elici novis exemplis Geometricis confirmamus*. Hanc aſſertionem ſibi oppugnandam ſuſcepit vir Clariſſimus Daniel Lipſtorpius in appendice, quam operi ſuo pererudito, quod Specimina Philoſophiæ Carteſianæ inſcripſit, hac de cauſa adjunxit. Id vero ea modeſtia, & humanitate præſtitit, ut facile appareat, hoc illi unum fuiſſe propoſitum, ut veritatem aſſequeretur. Ne autem videar doctiſſimi viri judicium parvi facere, hic illi breviter reſpondebo, & appendici appendicem reponam.

Concluſionem igitur oppugnatam ſic demonſtro.

Datur aſſertio, quæ directe ex ſua contradictoria inferatur. Talis in prop. 12. lib. 9. Eucl. eſt hæc: *Numerus E metitur numerum A*, quæ demonſtratione affirmativa infertur ex ſua contradictoria: *E non metitur numerum A.* Quod quidem eſt æque certum, ac demonſtrationem illam eſſe legitimam. Talis in Elementis hiſce noſtris prop. 4. lib. 11. eſt hæc: *Recta BQ non*

eſt perpendicularis plano C AF , quæ affirmative ducitur ex ſua contradictoria: *Recta BQ eſt perpendicularis plano C AF* . Talis in propoſitione noſtra 35. lib. 5. eſt hæc: *A eſt ad B*, *ut E ad Z*, quæ directe infertur ex ſua contradictoria : *A non eſt ad B*, *ut E ad Z*. Tales denique reperiuntur apud Cardanum lib. 5. de proport. p. 201 : apud Theodoſium (commentante Clavio) l. 3. ſph. p. 12. & nos plures ſimiles poſſumus exhibere tum Geometricas, tum alias .

Ecce tibi coſmographicam unam, quam in iiſdem theſibus diſputandam propoſui . *Maris*, *omniſque adeo humidi ſuperficies eo ipſo concluditur eſſe ſphærica*, *quo id negas*. Ponatur vera eſſe ejus contradictoria : *Maris ſuperficies ſphærica non eſt* . Quoniam igitur maris ſuperficies ſphærica non eſt, ergo omnes ſuperficiei maritimæ partes non diſtant æqualiter a centro. Ergo una eſt altior altera (altiorem enim eſſe non aliud eſt, quam longius a centro recedere.) Ergo eæ, quæ altiores ſunt, defluunt verſus minus altas, ſeu decliviores, hanc enim eſſe humidi naturam experientia conſtat. Ex tali autem defluxu neceſſario oritur omnium partium ſuperficiei maritimæ æqualis altitudo, ſeu diſtantia a centro . Æqualis vero omnium partium ſuperficiei maritimæ a centro diſtantia infert ſphæricitatem ejus perfectam. *Ergo maris ſuperficies ſphærica eſt*.

Habemus igitur hanc : *Maris ſuperficies ſphærica eſt* directe , & affrmative deductam ex ſua contradictoria: *Maris ſuperficies ſphærica non eſt.*

Maneat igitur extra omnem controverſiam eſſe, dari aſſertiones, quæ directe ex ſuis contradictoriis inferantur . Atqui aſſertio , quæ ex ſua contra-

contradictoria directe infertur, neceſſario vera eſt, (cum ſit axioma per ſe clariſſimum, id neceſſario verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit: deſtruit autem ſuum contradictorium, quod ex ſuo contradictorio directe ſequitur.) Ergo & aſſertionis contradictoria, ex qua videlicet deducta eſt aſſertio, falſa eſt. Ergo ex falſo directe, & affirmative deductum eſt verum. Demonſtrata igitur eſt concluſio in theſibus propoſita.

Quod vero ejuſmodi demonſtratio, qua aſſertio ex ſua contradictoria falſa directe infertur, vere ſcientiam pariat, ſic ut abſque ulteriori ulla deductione ad impoſſibile de aſſertionis veritate ſecuri eſſe debeamus, ex jam dictis manifeſtum eſt, cum lumine naturæ notiſſimum ſit, id neceſſario verum eſſe, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio ſequela legitima, & neceſſaria infertur. Quod ſi verum deducatur ex falſo quopiam ſibi non contradictorio, nequaquam talis ratiocinatio ſcientiam pariet, neque enim de veritate aſſertionis ſic deductæ ſecuri eſſe poſſumus, cum in ea ratio jam allata deficiat, & proprium falſo ſciamus eſſe, ut ex eo falſa deducantur.

His rite perceptis, facile eruditus Lector perſpiciet, nihil opus eſſe, ut ſingulis Clariſſimi Viri objectionibus, & argumentis refellendis immoremur, quæ vel contra me nihil faciant, vel ex jam dictis ſoluta intelligantur. Quia tamen non omnibus ad manum erit opus clariſſimi Viri, viſum eſt ſingula breviter attingere.

Primum ſupponit ex Dialectica quædam de conſequentia directa, & directo (ut vocant) de omni, & de nullo. Tum ſententiam exponit ſuam noſtræ oppoſitam. Subjungit deinde: *hanc ſen-*

ten-

tentiam meam ſtabilio everſione omnium illorum, quæ in contrarium afferri poſſe videntur.

Primum (inquit) *quod ex falſis verum concludere videatur, conſtituit hujuſmodi ſyllogiſmus: Omnis leo eſt lapis. Omnis adamas eſt leo. Ergo omnis adamas eſt lapis. In quo &c.* Tali ſyllogiſmo ad probandam aſſertionem meam ego non utor, in quo videlicet verum deducitur ex falſo non contradictorio, qui proinde etiam, ut oſtendi ſupra, ſcientiam non parit. Primum iſtud igitur me non tangit.

Secundum genus objectionum (inquit) *conſtituunt hypotheſes Aſtronomicæ &c. Quæ licet fictitiæ tantum ſint, & falſæ; tamen juxta eas calculum eclipſibus, & aliis obſervationibus cœleſtibus convenientem Aſtronomi exhibent.* Deinde poſtquam multis contendit, hinc non probari verum ex falſo directe elici, *Progredior* (inquit) *ad tertiam inſtantiam, quam ex regula falſi depromere licet &c.* contenditque rurſum hic non elici ex falſo verum. Quo quidem in utroque, cum illi ego plane aſſentiar, neque ullum inde pro aſſertione mea argumentum petam, non me magis illa tangunt, quam primum.

Ultimas denique objectiones (inquit) *nobis faceſſunt modi demonſtrandi ab Euclide 9. Elem. p. 12. Cardano lib. 5. de proport. p. 201. & Theodoſio lib. 1. ſph. p. 12. adhibiti.* quo me digitum intendiſſe putat, & vere. Ex his ſiquidem demonſtrandi modis evidenter jam demonſtravi ſupra, ex falſo elici directe verum, neque affertur quidquam a Clariſſimo Viro, quod demonſtrationem noſtram infirmet. Verbis Clavii ad p. 12. lib. 9. recitatis ſubjungit ex eodem Clavio demonſtratio-

tionem p. 12. lib. 1. ſph. Theodoſii: Tum (inquit) *ut verum fatear, neſcio ſane quid Clavio in mentem venerit, uti & Cardano, quare inſolitum hunc, & mirabilem argumentandi modum eſſe putaverint, qui tamen Logicis valde familiaris eſt, & duobus principiis omnium evidentiſſimis, & natura notiſſimis nititur, hiſce nempe: quod idem non poſſit ſimul eſſe, & non eſſe; item, quodlibet aut ſit, aut non ſit.* Quid Clavio, Cardano, & cum iſtis, aliiſque etiam mihi, in hac argumentandi forma ſit viſum mirabile, dicere in promptu eſt; hoc nimirum, quod aſſertio probanda (G eſt centrum ſphæræ,) directe ex ſua contradictoria (G non eſt centrum ſphæræ) conſequentiis legitimis, ac neceſſariis deducatur. Quod quidem, quotieſcunque evenit, admiratione dignum eſt. Tantum vero abeſt, ut hæc ratio demonſtrandi Logicis valde familiaris ſit, ut etiam non defuerint doctiſſimi viri, quibus ea impoſſibilis videretur. Ut deinde oſtendat vir Clariſs. hoc diſcurſu, verum ex falſo non deduci, repetit demonſtrationem propoſitionis Theodoſianæ, ſed forma plane diverſa a Claviana illa, quam prius recitaverat, in qua vis argumentationis inter nos controverſæ clariſſime cernitur. Subjungit denique: *neque ego tam lynceus ſum, ut exinde videre queam, quo pacto ex falſo verum directe ſequatur. Illud tamen video, quod ſi G demonſtretur non eſſe centrum ſphæra,* (vult, credo, dicere, *ponatur*, cum demonſtrari nequeat, quod falſum eſt) *neceſſario ſit admittenda contradictoria ejus affirmativa, quod G ſit centrum ſphæra.* Ad hæc verba repetam compendio demonſtrationem ſuperius datam, qua, opinor, fiet, ut V. C. tametſi, quod eſt maxime lynceus non eſſet,

cla-

clare perſpiciat elici directe ex falſo verum.

Quoniam admittit (id, quod etiam eo non dante evinceret Claviana demonſtratio) ſi G ponatur non eſſe centrum, ſequi neceſſitate abſoluta, & formali G eſſe centrum, manifeſtum eſt, G eſſe centrum, directe ſequi ex ſua contradictoria, G non eſt centrum. Ergo ex vi deductionis conſtat, verum eſſe, quod G ſit centrum, cum lumine naturali notum ſit, id eſſe neceſſario verum, quod ſuum contradictorium deſtruit, hoc eſt, quod ex ſuo contradictorio directe ſequitur. Habemus igitur, quod ex hac, G non eſt centrum, directe deducta ſit hæc vera: G eſt centrum. Atqui hæc, G non eſt centrum, falſa eſt, cum jam oſtenderim veram eſſe hanc: G eſt centrum. Ergo verum directe deductum eſt ex falſo.

Hæc ſunt, Erudite Lector, quæ ſuper hac quæſtione breviter hic putavi apponenda. Cæterum nihil dubito, quin Clariſſimus Lipſtorpius eadem animi æquitate reſponſionem hanc noſtram ſit accepturus, qua dedit oppugnationem ſuam, & ego illam accepi.

FINIS.

1461366

Digitized by Google

Digitized by Google

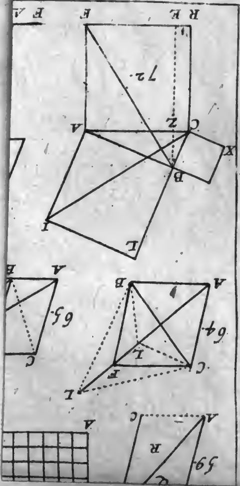
Digitized by Google



Digitized by Google



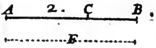
Tabula II.Lib

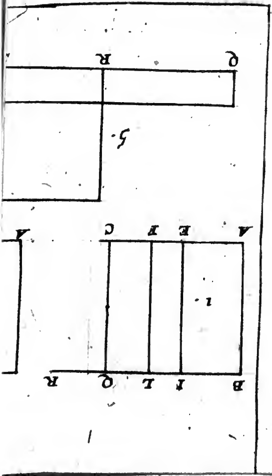




Google

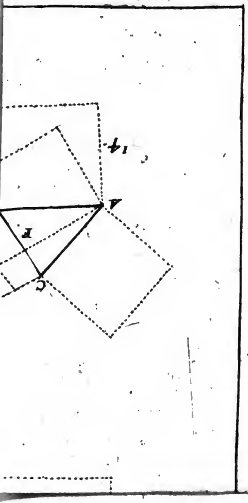
Tabula I.L



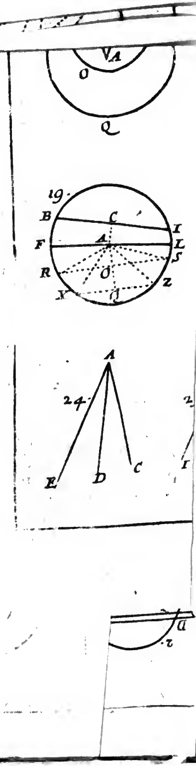


Digitized by Google

Tabul



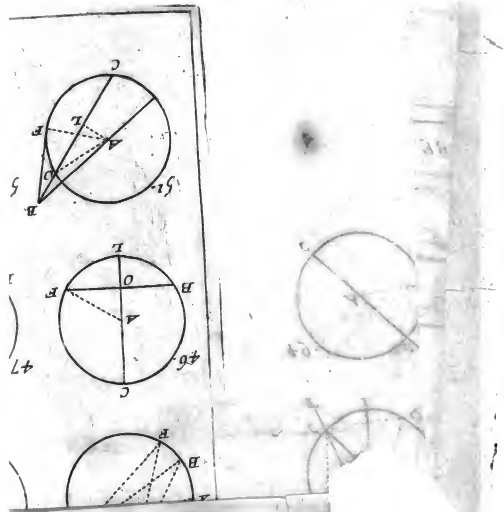
Digitized by Google



V A
O
Q
19.
B
C
I
F
A
L
S
R
O
Z
X
24.
A
E
D
C
2.
D

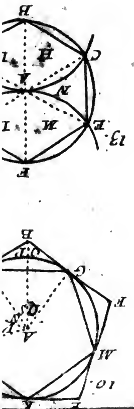
Digitized by Google

Tab.



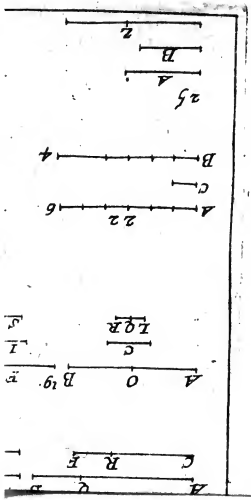
Digitized by Google

Tab

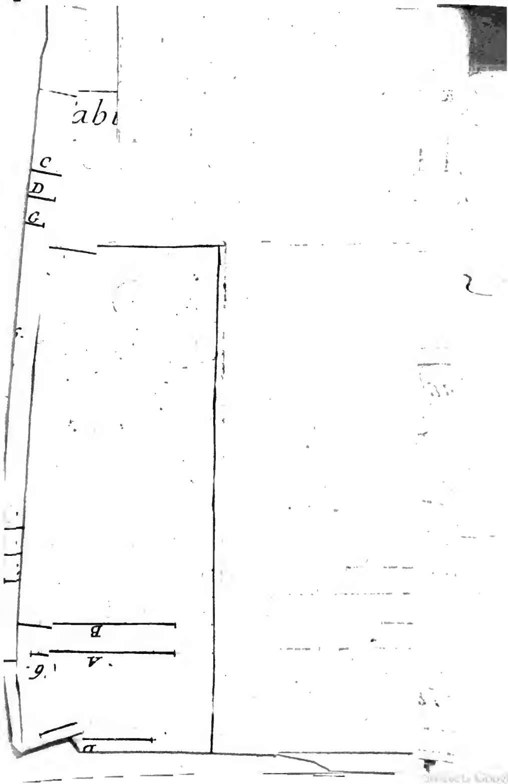


Digitized by Google

Tabula I



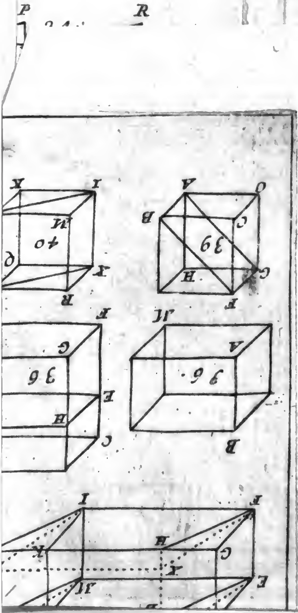
[illegible] Google



Digitized by Google

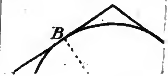
Digitized by Google

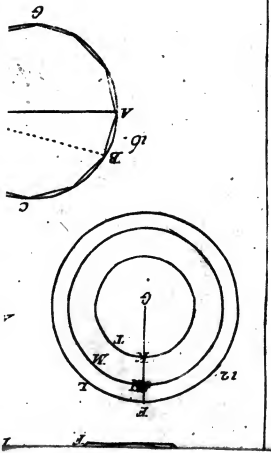
bula II. Libri XI



Digitized by Google

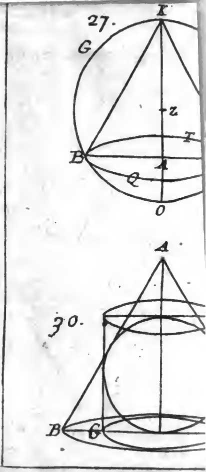
ula I. Arc





Digitized by Google

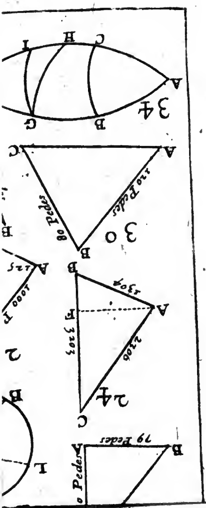
Digitized by Google


27.
K
G
z
T
B
A
Q
O
A
30.
B
G


N
T
L

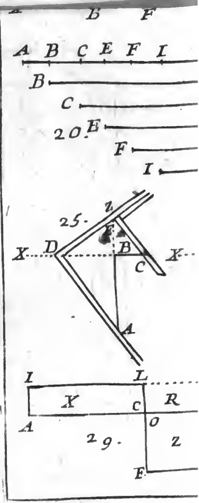
Digitized by Google

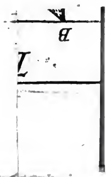
HEMA



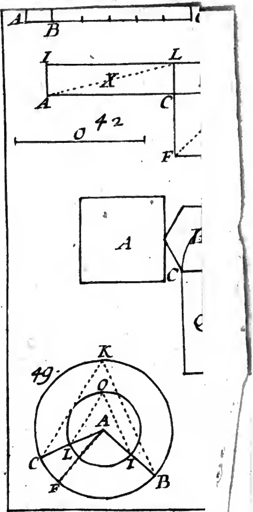
Digitized by Google

Digitized by Google


A B C E F I
B
C
20. E
F
I
25.
z
F
X D B X
C
A
I L
X c R
A o
29.
z
E

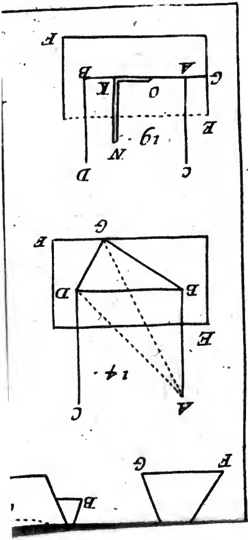

B
L

Digitized by Google


A
B
I
L
X
A
C
42
F
A
E
C
K
49
O
A
C
L
I
B
F

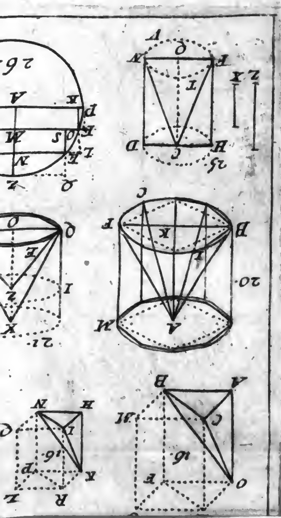
Digitized by Google

Tabula



Digitized by Google

abula Lib



Google

Digitized by Google

Google